बी0टी0सी0 (द्विवर्षीय) पाठ्यक्रमानुसार

(बेसिक टीचर सर्टीफिकेट)

सेवापूर्व शिक्षक प्रशिक्षुओं के लिए पाठ्यपुस्तक

गणित

प्रथम सेमेस्टर

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ,
उ0 प्र0 , लखनऊ
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0 , इलाहाबाद

संरक्षक - श्री हीरा लाल गुप्ता-आई.ए.एस., सचिव बेसिक शिक्षा, उ0प्र0 शासन, लखनऊ

परामर्श - सुश्री कुमुदलता श्रीवास्तव-आई.ए.एस., राज्य परियोजना निदेशक, उ0प्र0 सभी के लिए शिक्षा परियोजना परिषद्, लखनऊ

निर्देशक - श्री सर्वेन्द्र विक्रम बहादुर सिंह, निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, उ0प्र0 लखनऊ

समन्वयक - श्रीमती नीना श्रीवास्तव, निदेशक राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0 इलाहाबाद

लेखक - श्रीमती रागिनी श्रीवास्तव, श्रीमती मंजूषा गुप्ता, श्री कैलाश बाबू तथा श्री राकेश कुमार पाण्डेय।

कम्प्यूटर ले आउट- कामर्शियल प्रेस, इलाहाबाद

प्राक्कथन

समय-समय पर साामाजिक बदलाव और उसके अनुरूप आवश्यकताओं को ध्यान में रखते हुए शिक्षा-प्रणाली तथा पाठ्यक्रमों में भी संशोधन एवं युगानुरूप परिवर्तन करने की आवश्यकता शिक्षा-विदों द्वारा अनुभव किया जाना एक स्वाभाविक प्रक्रिया है। इसी के अन्तर्गत राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 तथा शिक्षक-शिक्षा की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2009 के आलोक में उत्तर प्रदेश में प्राथमिक कक्षाओं के शिक्षकों हेतु सेवापूर्व प्रशिक्षण की केन्द्र पुरोनिधानित शिक्षक-शिक्षा योजना लागू की गयी है। इसके अन्तर्गत बी0टी0सी0 के दो वर्षीय पाठ्यचर्या का पुनरीक्षण कर समावेशी विभिन्न विषयों के पाठ्यक्रमों को समुन्नत किया गया है तथा प्रशिक्षु शिक्षकों से यह अपेक्षा की गयी है कि वे बिना किसी भय के शिक्षार्थियों के ज्ञानार्जन में उनकी सहायता कर सकें। नवीन पाठ्यचर्या एवं पाठ्यक्रमों के सन्निहित उद्देश्यों को दृष्टिगत कर राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0, इलाहाबाद द्वारा विज्ञान एवं गणित विषयों की पाठ्यपुस्तकों का सृजन किया गया है।

पाठ्यपुस्तकों की संरचना करते समय इस बात को विशेष महत्व देते हुए भरपूर प्रयास किया गया है कि प्रशिक्षित शिक्षक की ओजभरी वाणी में इतना आकर्षण एवं शाक्ति हो कि वह शिक्षाग्रहण करने वाले प्रशिक्षणार्थियों के मन की समस्त दुविधाओं को दूर कर उनकी बुद्धि का पूरा लाभ उन्हें प्रदान कर सके तथा वह गुरूजनों को अपने माता-पिता के समान अपना सच्चा मार्गदर्शक समझकर उनके द्वारा प्रदत्त ज्ञान को प्राप्त कर सके।

विज्ञान और गणित विषय ही समाज को मानव जीवन को जीवन्त बनाने, उसे सब प्रकार के भौतिक सुखों से आप्लावित करने, भविष्य की सुखद योजनाओं की संकल्पना करने, उसका ब्लू-प्रिंट तैयार कर उसे कार्यान्वित करने का सार्थक स्वप्न दिखाते हैं। इन स्वप्नों को साकार करने के बीज जब प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर बच्चों के उर्वर मन में बो दिया जाता है तथा शिक्षक की वाणी की ज्ञान गंगा जब उन्हें निरन्तर सींचती रहती है, तो उसी में से एक दिन रमन, जगदीश चन्द्रबोस जैसे महान वैज्ञानिक तथा रामानुजन, शकुन्तला जैसे महान गणितज्ञ पैदा होते हैं। यह मानकर चलिए कि हमारे विद्या मन्दिर के प्रत्येक बालक-बालिका के उर में एक वैज्ञानिक, एक गणितज्ञ सोया हुआ है, बस आवश्यकता है कि उसे कैसे जगायें, कैसे ऊर्जा स्थित करें और कैसे सृजनात्मकता के पाठ पढ़ाये, और कैसे उसे ज्ञान, बोध, अनुप्रयोग और कौशल के सारे गुर सिखायें कि वह आगे चलकर अपनी अद्भुत प्रतिभा से राष्ट्र को समुन्नत करने का बीड़ा उठा सके।

सीमित समयान्तर्गत गणित विषय की पाठ्यपुस्तक को आकर्षक कलेवर प्रदान करने में हमें श्री सर्वेन्द्र विक्रम बहादुर सिंह निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसन्धान और प्रशिक्षण परिषद्, उत्तर प्रदेश, लखनऊ का समय-समय पर जो अत्यंत उपयोगी मार्ग दर्शन प्राप्त हुआ है, उसके लिए मैं उनके प्रति हार्दिक कृतज्ञता ज्ञापित करती हूँ। पाठ्य-पुस्तक के प्रणयन में लेखक मण्डल के सभी सदस्यों के अमूल्य सहयोग के लिए भी मैं उनके प्रति अपना आभार व्यक्त करती हूँ। शिक्षाविद् परामर्शदाताओं के सतत सहयोग से इस पाठ्यपुस्तक को निखारने में हमे जो सहयोग मिला है, उसके लिए भी मैं उन्हें धन्यवाद देती हूँ। मैं अपने संस्थान के सभी विद्वान सहयोगियों को भी ह्रदय से धन्यवाद देती हूँ जिनके अहर्निश परिश्रम के बल पर ही यह पाठ्यपुस्तक अन्तिम स्वरूप को ग्रहण कर सकी है।

सुधार और संशोधन की कोई सीमा नहीं होती है। मैं शिक्षा जगत के सभी सुधीजनों से अपेक्षा करती हूँ कि वे अपने सकारात्मक सुझावों से हमें अवश्य अवगत करायेंगे जिससे पाठ्य पुस्तक के अगले संस्करण को और अधिक ऊर्जावान एवं सार्थक बनाया जा सके।

श्रीमती नीना श्रीवास्तव
निदेशक
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0, इलाहाबाद

विषय सूची

इकाई- 1

संख्या तथा संख्यांक का बोध, अंको का ज्ञान तथा स्थानीय मान

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित बिन्दुओं की जानकारी प्राप्त करेंगे।

• संख्या तथा संख्यांक का बोध

• अंको का ज्ञान

• शून्य अंक का ज्ञान

• अंकों के स्थानीय मान का ज्ञान

गणित के विकास में संख्याओं का सबसे महत्वपूर्ण स्थान है सच तो यह है कि संख्याओं के बिना गणित की संकल्पना ही नहीं की जा सकती है संख्याओं के विकास के सम्बन्ध में विचार करें तो देखते हैं कि मूलरूप से संख्याओं का विकास उत्तरोत्तर मानव की आवश्यकता के अनुसार हुआ है। प्रारम्भ में सभ्यता के विकास में गिनती की संख्याओं जिन्हें प्राकृतिक संख्याएँ कहते हैं का विकास हुआ फिर पूर्ण संख्याओं का विकास हुआ। इस इकाई में हम संख्या तथा संख्यांक का बोध, अंकों का ज्ञान, शून्य अंक का ज्ञान तथा अंकों के स्थानीयमान पर विचार करेंगे। सभ्यता के विकास के साथ ही प्रकृति में पायी जाने वाली वस्तुओं को गिनने की आवश्यकता पड़ी। अंक-संकेतों अथवा संख्याओं को लिखने में प्रयुक्त अंकों का विकास हमारी अंगुलियों की ही सहायता से हुआ।

संख्या - जिन शब्दों से वस्तुओं की गिनती का बोध होता है उसे संख्या कहते हैं।

संख्यांक- संख्याओं को जिन संकेतों द्वारा व्यक्त किया जाता है। उन्हें संख्यांक कहते हैं। संख्यांक का अर्थ है, कि संख्या को लिखने के लिये प्रयुक्त अंक । निम्नांकित सारणी में एक से नौ तक की संख्याओं को संकेतों द्वारा विभिन्न लिपियों में प्रदर्शित किया गया है।

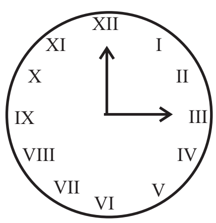
देवनागरी	१	२	३	४	५	६	७	८	९
रोमन	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
अरबी	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
अन्तर्राष्ट्रीय	1	2	3	4	5	6	7	8	9

बाद में भारतीयों ने शून्य (0) का आविष्कार किया तो इसकी सहायता से छोटी बड़ी हर प्रकार की संख्या को लिखना सम्भव हो सका।

संख्यांक संख्या को निरुपित करने वाला संकेत ही होता है।

रोमन संख्यांक-

अभी तक हम हिन्दी अरेबिक संख्यांको की पद्धति का ही प्रयोग करते रहे हैं। यह एक मात्र संख्यांक पद्धति नहीं है। संख्यांक लिखने की पुरानी पद्धतियों में से एक पद्धति रोमन संख्यांकों की पद्धति है। यह पद्धति अभी भी अनेक स्थानों पर प्रयोग की जाती है। जैसे हम घड़ियों में रोमन संख्यांको का प्रयोग देख सकते हैं। इनका प्रयोग स्कूल की समय-सारणी में कक्षाओं के लिए भी किया जाता है।



घड़ी

रोमन I II III IV V VI VII VIII IX X

अन्तर्राष्ट्रीय 1 2 3 4 5 6 7 8 9 और 10 द्वारा व्यक्त करते हैं। इसके बाद 11 के लिए XI और 12 के लिए XII......20 के XX का प्रयोग किया जाता है। इस पद्धति के लिए कुछ और संख्यांक संगत हिन्दू अरेबिक संख्यांकों के साथ इस प्रकार हैं-

I, V, X, L, C, D, M
1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000

इस पद्धति के नियम इस प्रकार हैं।

(i) यदि किसी संकेत की पुनरावृत्ति होती है तो जितनी बार वह आता है उसका मान उतनी ही बार जोड़ दिया जाता है जैसे ।। को 2 (दो) पढ़ा जाता है, XX को 20 पढ़ा जाता है, और XXX को 30 पढ़ा जाता हैं।

(ii) कोई संकेत तीन से अधिक बार नहीं आता है, परन्तु संकेतों V, L और D की कभी भी पुनरावृत्ति नहीं होती है।

(iii) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के बायीं ओर जाता है तो बड़े मान में छोटे मान को घटा दिया जाता है।

जैसे- IV = 5-1= 4, IX = 10 - 1 = 9, XL = 50 - 10 = 40, XC = 100 - 10 = 90

(IV) संकेतों V, L और D की कभी भी बड़े मान वाले संकेत के बायीं ओर नहीं लिखा जाता है अर्थात् V, L और D के मानों को कभी भी घटाया नहीं जा सकता है। संकेत I को केवल V और X में से घटाया जा सकता है। संकेत X को केवल L, M और C में से ही घटाया जा सकता है। उपरोक्त नियमों के अनुसार कुछ उदाहरण प्रस्तुत हैं-

1 = I	20 = XX	500 = D
2 = II	30 = XXX	1000 = M
3 = III	40 = XL	
4 = IV	50 = L	
5 = V	60 = LX	
6 = VI	70 = LXX	
7 = VII	80 = LXXX	
8 = VIII	90 = XC	
9 = IX	100 = C	
10 = X		

(a) उपरोक्त सारणी में छुटी हुई संख्याओं को रोमन पद्धति में लिखने का प्रयास करें।

(b) XXXX, VX, IC, XVV......इत्यादि नहीं लिखे जाते हैं। इसे भी जानने का प्रयास करें।

(V) रोमन पद्धति में बड़ी संख्याओ को 1000 से अपवर्त्य (multiple) में निम्नांकित प्रकार से प्रदर्शित करते हैं-

$\overline{V}$ = 5000 $\overline{X}$ = 10,000 $\overline{L}$ = 50,000
$\overline{C}$ = 1,00,000 $\overline{D}$ = 5,00,000 $\overline{M}$ = 10,00,000

उदाहरण- निम्नलिखित को रोमन संख्याओं में लिखिए-

(a) 69
69 = 60 + 9
= (50+10) + 9
= LX + IX
= LXIX

(b) 98
98 = 90 + 8
= (100 - 10) + 8
= XC + VIII
= XCVIII

(c) 49 = XLIX (d) 333 = CCC XXXIII

अंकों का ज्ञान-

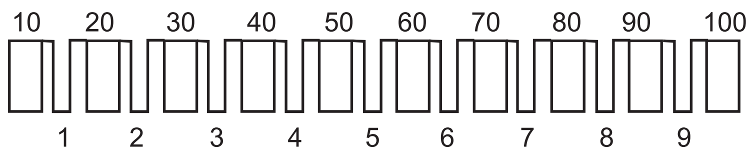
मानव को अपनी वस्तुओं को गिनने और वस्तुओं की संख्या को लिखने या लिपि बद्ध करने की आवश्यकता पड़ी। इस कार्य में हाथ की अंगुलियों की महत्वपूर्ण भूमिका रही। आज भी छोटी-छोटी संख्याओं को जोड़ने घटाने आदि क्रियाओं को हम अंगुलियों की सहायता से करते हैं। इसलिए मानव हाथ को डिजिटल कम्प्यूटर की संज्ञा दी गयी है। यहाँ यह विशेष रूप से ध्यान देने योग्य बात है कि डिजिट का अर्थ अंगुली होता है। और डिजिट का अर्थ गणित में अंक भी होता है। इससे यह तो स्पष्ट रूप से परिलक्षित होता है कि अंक-संकेतों (संख्यांक) अथवा संख्याओं को लिखने में प्रयुक्त अंकों का विकास हमारी अंगुलियों की ही सहायता से हुआ। हम देख चुके हैं कि हाथ की अंगुलियों के जोड़-तोड़ से 1 से 9 तक संख्याओं के लिए विभिन्न देशों की सभ्यताओं में संकेत विकसित किये गये।

संख्याओ का गिनना- अंकों के ज्ञान के उपरान्त वस्तुओं के गिनने, हिसाब-किताब रखने तथा वस्तुओं के लेन-देन की आवश्यकता पड़ी। मानव ने सबसे पहले अपने हाथ की अंगुलियों की सहायता से ही गिनना सीखा। हाथ की दस अंगुलियों की सहायता से दस तक की गिनती हो सकती थी। पैरों की अंगुलियों को भी लेकर बीस तक गिना जा सकता था।

वस्तुओं की संख्या अधिक होने पर एक नई विधि का आविष्कार किया गया जिससे 100 तक गिना जाना सम्भव हो गया। इस विधि में अँगुलियों के बीच के गड्ढों को इकाइयाँ और जोड़ों को दहाइयाँ माना गया। इस प्रकार दोनों हाथों के गड्ढों से नौ तक की इकाइयाँ बनी और जोड़ों से दस दहाइयाँ बनी।

इस विधि में स्थान मान पद्धति का उपयोग किया गया है। कोई स्थान इकाई व्यक्त कर रहा है और कोई दहाई। यहाँ स्थान भेद से संख्या का मान बदल गया है।

निम्नांकित चित्र की सहायता से इसे समझने में सरलता होगी-



पहले वस्तुओं को 1 से 9 तक गिनते थे और 10 प्रथम जोड़ को मान लेते थे। पुनः 11 से 19 तक गिनते थे और 20 के लिए दूसरे जोड़ का प्रयोग किया जाता था। दोनों हाथों की मुट्ठी बाँधकर मिला देने पर यह जोड़ और गड्ढे.और भी स्पष्ट दिखने लगते थे। इस प्रकार 52 कहने के लिए अँगुलियों के पाँचवे जोड़ और दूसरे गड्ढे पर अँगुली रखनी होगी।

इस प्रकार हम देखते हैं कि पूर्वकाल में 100 तक की गिनती के उपरान्त उससे बड़ी संख्याओं को गिनने में तथा लिखने में कठिनाई आ गई। बड़ी से बड़ी संख्याओं को कम से कम संकेतों की सहायता से लिखने की प्रणाली तब तक किसी भी सभ्यता में विकसित नहीं हो पायी थी। इस प्रणाली का आविष्कार भारतीय विद्वानों ने किया। इस प्रणाली की मुख्य विशेषताएँ हैं- शून्य का आविष्कार एवं दाशमिक स्थान पद्धति।

शून्य का आविष्कार- गड़्ढ़ों में कौड़ियाँ रखकर बड़ी संख्याओं का लेखा जोखा रखने की पद्धति का आविष्कार भारत में किया जा रहा था। निम्नांकित स्थितियों पर विचार कीजिए।

यहाँ दाईं ओर के प्रथम गड़्ढ़े में कोई कौड़ी नहीं है। इसके बाईं ओर के द्वितीय गड़्ढ़े में दो कौड़ियाँ हैं और इसके भी बाईं ओर के तीसरे गड़्ढ़े में एक कौड़ी रखी हे। 1 से 9 तक संख्याओं के लिए संकेत विकसित हो चुके थे। अब हम इन विकसित संकेतों को गड़्ढ़े के नीचे भूमि पर लिखते हैं।

यहाँ प्रश्न यह उठता है कि प्रथम गड़ढे में जब कोई कौड़ी नहीं है तो उसके नीचे क्या लिखा जाये।

हमारे मनीषियो ने इस रिक्त स्थान के लिए उसी गड्ढ़े के आकार को ही सुनिश्चित कर लिया और इस संकेत को शून्य की संज्ञा दी गई क्योंकि शून्य का अर्थ रिक्त होता है अब स्थिति इस प्रकार बन गई। जैसे संख्या 120 में इकाई के स्थान पर शून्य है। दहाई के स्थान पर दो है जिसका अर्थ है $2 \times 10 = 20$ हुआ और सैकड़े के स्थान पर एक है जिसका अर्थ है $1 \times 100 = 100$ हुआ इसी प्रकार पूरी संख्या का अर्थ $1 \times 100 + 2 \times 10 + 0 \times 1 = 120$ हुआ इसी प्रकार गड्ढों में रखी कौड़ियों की विभिन्न स्थितियों को निम्नांकित ढंग से व्यक्त किया जाने लगा।

2 1 5 3 0 2

200+10+5(दो सौ पन्द्रह) 300+0+2 (तीन सौ दो)

यहां पर स्पष्ट है कि 1 से 9 तक की संख्याओं के मान स्थान के हिसाब से एक गुना, दस गुना, सौ गुना, हजार गुना हो जाते हैं। जिस स्थान पर कोई संख्या नहीं होता है उस स्थान की रिक्तता को खाली गड्ढे के प्रतीक 0 से निरुपित किया जाता है।

इस प्रकार 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 के संकेतों की सहायता से बड़ी से बड़ी संख्याओं को लिखना सम्भव हो गया है।

दाशमिक स्थान मान सिद्धान्त और शून्य का सांकेतिक चिन्ह भारत का अमूल्य योगदान माना जाता है। जो अंक गणित के विकास में मील का पत्थर सिद्ध हुआ। शून्य तथा दाशमिक स्थान मान पद्धति का आविष्कार वैदिक काल (1000 ई0 पूर्व तक) माना जाता है वेदों में संख्याओं और दाशमिक प्रणाली का स्पष्ट उल्लेख मिलता है। शून्य का आविष्कार भारत में ही हुआ। यह स्पष्ट नहीं हो सका कि किस भारतीय ने इसको सर्वप्रथम लिखना प्रारम्भ किया शून्य का आविष्कार सारी दुनिया के लिए महत्व पूर्ण सिद्ध हुआ इसलिए भारत को इस शून्य के आविष्कार का श्रेय मिला है।

अंकों का स्थानीयमान-

किसी संख्या में प्रत्येक स्थान के संगत अंक का मान अलग-अलग होता है इसे अंक का स्थानीयमान कहते हैं।

उदाहरण-1:- संख्या 3477 में दोनों 7 के स्थानीयमान ज्ञात करो।

हल - 3477 = 3000+400+70+7

अतः दाहिनी ओर से

पहले 7 का स्थानीय मान = 7

दूसरे 7 का स्थानीय मान = 70

उदाहरण-2:- 3477 में 3, 4, 7 अंकों का स्थानीय मान ज्ञात करो।

दाहिनी ओर से

पहले 7 का स्थानीय मान = 7

दूसरे 7 का स्थानीय मान = 70

4 का स्थानीय मान = 400

3 का स्थानीय मान = 3000

मूल्यांकन-

1. निम्नलिखित संख्याओं को संख्यांकों में व्यक्त कीजिए-

(1) चार सौ सत्ताईस (2) तीन हजार पाँच सौ एक

(3) एक सौ पन्द्रह (4) उन्यासी हजार उन्तीस

2. 5231 में प्रत्येक अंक का स्थानीय मान ज्ञात कीजिए।

3. 22222 में प्रत्येक 2 का स्थानीय मानों का योगफल ज्ञात कीजिए।

4. पाँच अंकों की सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या लिखिए।

5. संख्या 2345 में अंक 3 का स्थानीय मान है-

(i) 300 (ii) 30 (iii) 100 (iv) 3000

6. संख्या 154525 में 5 के स्थानीय मानों का योग है-

(i) 55005 (ii) 50505 (iii) 50055 (iv) इनमें से कोई नहीं

इकाई - 2

गुणा तथा भाग की संकल्पना एवं संक्रियाएं

इस इकाइ के पहले से निम्न बिन्दुओं की जानकारी होगी-

- गुणा की संकल्पना
- गुणा की संक्रिया
- भाग की संकल्पना
- भाग की संक्रिया

गुणा की संकल्पना-

कृपया ध्यान दें-

2+2+2+2+2 = 10 = 2 का जोड़ 5 बार = 2 x 5 = 10

इसी प्रकार

5+5+5+5+5 = 25 = 5 का जोड़ 5 बार = 5 x 5 = 25

उपरोक्त उदाहरण से स्पष्ट हैं कि किसी संख्या का आपस में बार-बार जोड़ ही गुणा बन जाता है या जोड़ने का संक्षिप्त रूप गुणा हैं गुणा की क्रिया को पहाड़ों की सहायता से आसानी से किया जा सकता है। कृपया ध्यान दें-

$$4 = 4 \times 1 = 4$$
$$4 + 4 = 4 \times 2 = 8$$
$$4 + 4 + 4 = 4 \times 3 = 12$$
$$4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 4 = 16$$
$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 5 = 20$$
$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 6 = 24$$
$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 7 = 28$$
$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 8 = 32$$
$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 9 = 36$$
$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 10 = 40$$

यह 4 का पहाड़ा है।

अतः किसी संख्या का बार-बार जोड़ ही गुणा है। बार-बार जोड़ने को आसान बनाने का तरीका गुणा है।

उदाहरण 1 : 62 × 74 को हल करो-

इसे इस प्रकार से हल कर सकते हैं।

```
     6 2
   × 7 4
  ------
   2 4 8  इकाई के अंक से गुणा करने पर अर्थात 62 × 4
 4 3 4 0  दहाई के अंक से गुणा करने पर अर्थात 62 × 70
  ------
 4 5 88  जोड़ने पर
  ------
```

उदारहण 2- 675 × 67 को गुणा कीजिए।

```
     6 7 5
     × 6 7
  --------
   4 7 2 5   इकाई के अंक से गुणा करने पर
 4 0 5 0 0   दहाई के अंक से गुणा करने पर
  --------
 4 5 2 2 5   जोड़ने पर
```

तीन अंकीय संख्याओं से गुणा

उदारहण 3- 42186 × 335 से गुणा कीजिए।

```
       4 2 1 8 6
         × 3 3 5
  --------------
     2 1 0 9 3 0   इकाई के अंक से गुणा करने पर अर्थात 42186 x 5
   1 2 6 5 5 8 0   दहाई के अंक से गुणा करने पर अर्थात 42186 x 30
 1 2 6 5 5 8 0 0   सैकड़े के अंक से गुणा करने पर अर्थात 42186 x 300
  --------------
 1 4 1 3 2 3 1 0
```

अतः उपरोक्त उदाहरण से स्पष्ट हैं कि-

- इकाई का गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को इकाई के स्तम्भ से और दहाई का गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को दहाई के स्तम्भ से लिखना शुरू करते हैं। दहाई के गुणनफल में इकाई के स्थान पर 0 लिख देते हैं।
- इसी प्रकार सैकड़े के अंक का गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को सैकड़े के स्तम्भ से लिखना शुरू करते हैं। इकाई और दहाई के स्तम्भ में शून्य लिख देते हैं।
- आखिरी में तीनों गुणनफलों का योग कर देते हैं।

इसे भी जानें-

- दो संख्याओं के गुणा में संख्याओं का क्रम बदलने पर गुणनफल नहीं बदलता है। जैसे

  28 x 3 = 84   या 3 x 28 = 84
- किसी संख्या और 1 का गुणनफल सदैव वह संख्या होती है। जैसे-

  115 x1 = 115,   100 x 1 = 100,   1 x 442 = 442
- किसी संख्या और शून्य का गुणनफल सदैव शून्य होता है।

  उदाहरणार्थ-

  24 x 0 = 0,   12 x 0 = 0,   0 x 25 = 0
- किसी संख्या में 100, 200, 300 ..... 900 का गुणा करने पर दी गई संख्या में क्रमशः 1, 2, 3 ..... 9 से गुणा करके गुणनफल के दाहिने ओर दो शून्य लिख देते है। जैसे-

  31 x 100 = 3100

  43 x 300 = 12900

  16 x 900 = 14400
- किसी संख्या में 1000, 2000, 3000 ..... 9000 का गुणा करने पर दी गई संख्या में क्रमशः 1, 2, 3 .... 9 से गुणा करके गुणनफल के दाहिनी ओर तीन शून्य लिख देते है। इसी प्रकार किसी संख्या को 10,000, 20,000 ..... 90,000 से गुणा करने पर गुणनफल के दाहिनी ओर चार शून्य लिख देते है।

भाग की संकल्पना

राम और श्याम की माँ ने उन्हें टाँफियाँ खरीदने के लिए कुछ पैसे दिये। उन्होने 10 टाँफिया खरीदी।

टाँफियों को बराबर बांटने के लिए दोनों ने एक ढंग ढूंढा। पहली बार दोनों ने एक-एक टाँफी लिया।

इस प्रकार 2 टाँफिया बंट गयी। अब 10 - 2 = 8 टाँफियाँ बची

दूसरी बार एक-एक टाँफी बाँटने पर 8 - 2 = 6 टाँफियाँ बची

तीसरी बार एक-एक टॉफी बाँटने पर 6 - 2 = 4 टाँफिया बची

चौथी बार एक-एक टॉफी बाँटने पर 4 - 2 = 2 टाँफिया बची

पाँचवी बार एक-एक टाँफी बाँटने पर 2 - 2 = 0 टाँफिया बची

पाँच बार बाँटने के पश्चात दोनों को पाँच-पाँच टाँफिया मिली तथा एक भी टाँफी नही बची।

इस क्रिया में हम देखते है कि 10 में 2 पाँच बार सम्मिलित है (किसी वस्तु समूह को बराबर भागों में बाँटना ही भाग हैं।)

निष्कर्ष- किसी संख्या से एक ही संख्या को बार-बार घटाने की क्रिया भाग बन जाती है।

उदाहरण- $10 \div 2 = 5$ लिखा जायेगा।

भाग की संक्रियाः-

कृपया ध्यान दें- अमन, चमन एवं सुमन को दशहरा का मेला देखने के लिए पिता जी ने 19 रूपये दिये तथा कहा कि इन रूपयों को आपस में बराबर-बराबर बाँटने के बाद जितने रूपये बचते है उसे बहन सुमन को दे देना। प्रत्येक को कितने रूपये मिलेंगे।

इसे भी जानें

- शून्य के अतिरिक्त किसी भी संख्या से शून्य में भाग देने पर भागफल सदैव शून्य ही रहता है। जैसे-

  $0 \div 5 = 0$, $0 \div 16 = 0$, $0 \div 126 = 0$
- किसी संख्या में 1 से भाग देने पर भागफल वही संख्या होती है। जैसे-

  $25 \div 1 = 25$, $121 \div 1 = 121$, $2345 \div 1 = 2345$
- शून्येतर (शून्य के अलावा) किसी संख्या में उसी संख्या से भाग देने पर भागफल 1 प्राप्त होता है।

  $14 \div 14 = 1$, $295 \div 295 = 1$, $1234 \div 1234 = 1$
- तीन या तीन से अधिक अंकों की संख्या में 100 से भाग देने पर इकाई और दहाई के अंकों से बनी संख्या शेषफल रहती है, जबकि बचे हुए अंकों से बनी संख्या भागफल होतीहै। जैसे- 1565 में 100 से भग करने पर भागफल 15 और शेषफल 65 होगा।
- चार या चार से अधिक अंकों की संख्या में 1000 से भाग देने पर इकाई, दहाई और सैकड़े के अंकों से बनी संख्या शेष रहती है, जबकि बचे हुए अंकों से बनी संख्या भागफल होती है। जैसे- 3423 में 1000 से भाग देने पर भागफल 3 और शेष 423 होगा।

क्रियाकलाप-

अधोलिखित प्रश्नों के दो प्रशिक्षुओं से अलग-अलग हल करायें।

1. 245 x 105 का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
2. 61 को 3 से भाग दीजिए व भागफल ज्ञात कीजिए।

प्रथम प्रशिक्षु द्वारा किया गया हल-

(1)

```
    2 4 5
  x 1 0 5
  -------
  1 2 2 5
  2 4 5 0
  -------
  3 6 7 5
```

(2)

```
3 ) 6 1 ( 2
    6
    ----
    0 1
    ----
```

भागफल = 2

द्वितीय प्रशिक्षु द्वारा किया गया हल-

(1)

```
      2 4 5
    x 1 0 5
  ---------
    1 2 2 5
    0 0 0 0
  2 4 5 0 0
  ---------
  2 5 7 2 5
  ---------
```

(2)

```
3 ) 6 1 ( 2
    6
    ----
    0 1
    ----
```

भागफल = 20

उपरोक्त हल से निष्कर्ष निकलता है कि प्रथम प्रशिक्षु द्वारा किया गया गलत व त्रुटिपूर्ण हैं जबकि द्वितीय प्रशिक्षु द्वारा किया गया हल तर्क संगत और सही हैं। शिक्षक और प्रशिक्षु तर्क करें कि ''ऐसा क्यों' ?

19 = 18 + 1 = 3 × 6 + 1 अतः

19 में 3 छः बार सम्मिलित है तथा 1 शेष है।

अमर और चमन में प्रत्येक को 6 रूपये तथा सुमन को 6 + 1 = 7 रूपये मिलेंगे।

यहाँ भाजक 3, भाज्य 19, भागफल 6 तथा शेषफल 1 हैं।

$\boxed{\text{क्योंकि } 19 = 3 \times 6 + 1}$

अतः भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

उदाहरण -

72 को 12 से भाग दीजिए।

पता लगाते है कि 12 को किस संख्या से गुणा करने पर गुणनफल 72 प्राप्त होता है। हम देखते हैं कि 12 × 6 = 72 अर्थात 12 छक्का 72 (12 का पहाड़ा याद होने पर हल सरल हो जायेगा।)

```
12 ) 72 ( 6
    - 72
    ----
     0 0
    ----
```

मूल्यांकन-

निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए-

1. (i) 25 X 4 (ii) 20 X 0 (iii) 32 X 100
2. (i) 2785 X 4 X 403

निम्नलिखित का भागफल तथा शेषफल लिखिए-

3. (i) 0 ÷ 5 (ii) 100 ÷ 1 (iii) 27 ÷ 27
4. (i) 785416 ÷ 205

5. यदि भाजक 483 भागफल 403 तथा शेष 50 हो तो भाज्य ज्ञात कीजिए

6. एक कारखाने में प्रत्येक दिन 750 साइकिलें तैयार होती है। दो वर्ष में कुल कितनी साइकिलें बनेंगी ? यदि उन दो वर्षों में एक वर्ष लीप वर्ष हैं।

7. अनिल ने भाग का एक प्रश्न हल करने के बाद बताया कि उसका भागफल शेषफल का पाँच गुना तथा भाजक भागफल का बीस गुना है। यदि शेषपुल 76 है तो भाज्य ज्ञात कीजिए।

8. एक कारखाने में कर्मचारियों की वर्दी बनवाने के लिए कुल रू 64128 खर्च किये गये। यदि एक वर्दी बनवाने में रू 368 खर्च हुए हों तो कारखाने में कुल कितने कर्मचारी हैं ?

9. 150 को 3 से भाग देने पर भागफल है-

(i) 5 (ii) 50 (iii) 45 (iv) इनमें से काई नहीं

10. 24 को किस संख्या से गुणा करने पर गुणनफल 2400 प्राप्त होगा-

(i) 100 (ii) 1000 (iii) 10 (iv) इनमें से काई नहीं

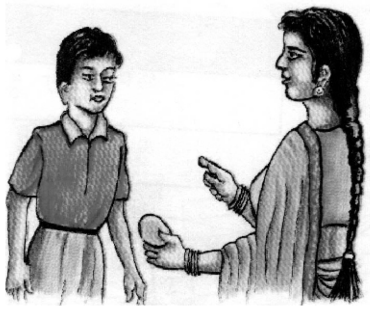
इकाई - 3

भिन्न की संकल्पना तथा गणितीय संक्रियाएं

इस इकाई में प्रशिक्षु निम्न का ज्ञान प्राप्त करेंगे-

- भिन्न की संकल्पना
- भिन्न की गणितीय संक्रियाएं
- भिन्न का जोड़ तथा घटाना
- भिन्नों का गुणा एवं भाग

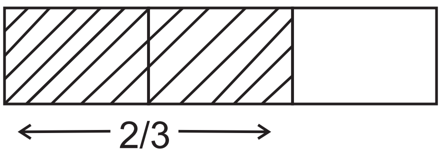
भिन्न की संकल्पना- सोहन की माँ ने सोहन से एक रोटी को बीच से मोड़कर दो बराबर भाग में करने को कहा और पूछा कि प्रत्येक भाग को क्या कहोगे ? सोहन प्रत्येक भाग को आधी रोटी या प्रत्येक भाग रोटी का आधा भाग है, कहेगा

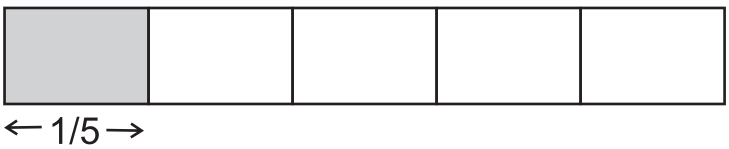


पुनः सोहन रोटी के आधे मुड़े भाग को बीच से मोड़कर रोटी को चार बराबर-बराबर भागों में बांटता है। इस प्रकार प्रत्येक भाग रोटी का चौथाई भाग है।

अब संकेतों के रूप में इन भागों को अर्थात आधे भाग को $\frac{1}{2}$ तथा चौथाई भाग को $\frac{1}{4}$ के रूप में प्रकट करते है इन्हें क्रमशः एक बटा दो तथा एक बटा चार पढ़ते हैं।

अब प्रशिक्षु कागज के पन्ने को तीन, चार, ... आदि के बराबर भागों में बांटे तथा विभिन्न भागों को लेकर उनको भिन्न के रूप में प्रकट करें।

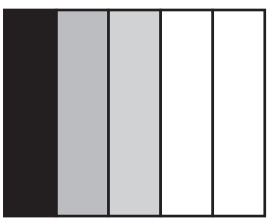


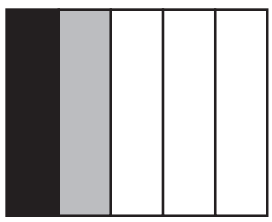


पूरी वस्तु को जितने बराबर-बराबर भाग किये गये उन्हें 'हर' शब्द से प्रकट करते हैं तथा जितने भागों को लेते हैं उसे 'अंश' शब्द से प्रकट करते हैं।

क्रियाकलाप- शिक्षक प्रशिक्षुओं से गोलाकार तथा वर्गाकार दफ्ती के टुकड़ों को क्रमशः दो, तीन तथा चार बराबर भागों में बँटवाकर उन्हें अलग-अलग भिन्न के रूप में प्रदर्शित करवायें।

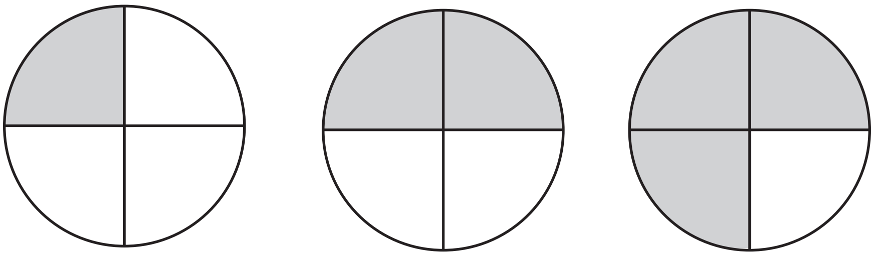
बड़े तथा छोटे भिन्नों का ज्ञान





छायांकित भाग $= \frac{3}{5}$ (यहाँ 3 अंश तथा 5 हर हैं।)   छायांकित भाग $= \frac{2}{5}$ (यहाँ 2 अंश तथा 5 हर है।)

दो बराबर कागज के पन्नों को लेकर उन्हें पाँच बराबर भागों में बांटे तथा पहले पन्ने के तीन भाग को तथा दूसरे पन्ने को दो भागों को उपरोक्त चित्रानुसार रंगे। दोनों पन्नों के रंगो भागों में पहले पन्ने को रंगा भाग अर्थात् भिन्न $\frac{3}{5}$ दूसरे पन्ने के रंगे भाग $\frac{2}{5}$ से अधिक है। अतः भिन्न $\frac{3}{5}$, भिन्न $\frac{2}{5}$ से बड़ी अथवा भिन्न $\frac{2}{5}$, भिन्न $\frac{3}{5}$ से छोटी है। पुनः नीचे बने वृत्त के रंगे भाग को देखकर बड़ी तथा छोटी भिन्न को पहचाने।

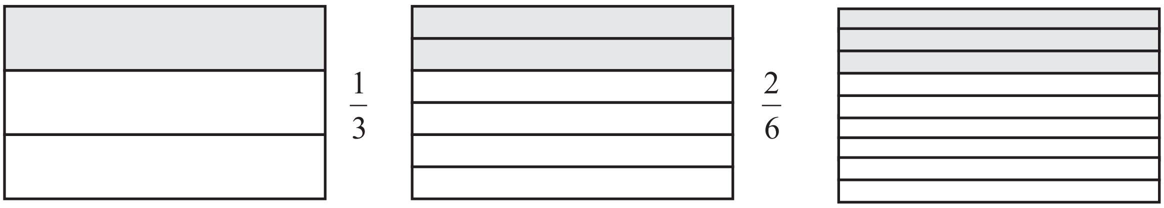


$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$

उनमें क्रमशः भिन्न $\frac{2}{4}$ तथा $\frac{3}{4}$, भिन्न $\frac{1}{4}$ से बड़ी हैं।

अर्थात् यदि दो भिन्नों के हर समान हैं, तो जिस भिन्न का अंश बड़ा, वह बड़ी भिन्न और जिसका अंश छोटा वह छोटी भिन्न होती है

समतुल्य भिन्नों का ज्ञान -



$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{9}$

दो बराबर कागज के पन्ने को लेकर उनमें से प्रथम पन्ने को तीन बराबर भागों में तथा दूसरे पन्ने को छः बराबर भागों में उपरोक्त चित्रों की भांति बांटे तथा उनमें से प्रथम का एक भाग तथा दूसरे के पास-पास के दो भाग रंगे। दोनों पन्नों के रंगे भाग बराबर दिखाई देते हैं। अतः भिन्न $\frac{1}{3}$, भिन्न $\frac{2}{6}$ के समतुल्य है। इसी प्रकार कागज के पन्ने को 9 बराबर भागों में बांटे तो देखते हैं कि भिन्न $\frac{3}{9}$ के रंगे भाग भी, भिन्न $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ के समतुल्य है।

अतः $\frac{1}{3} = \frac{1x2}{3x2} = \frac{2}{6}$

$$\frac{1}{3} = \frac{1x3}{3x3} = \frac{3}{9}$$

इसी प्रकार $\frac{2}{6} = \frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3}$

$$\frac{3}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$$

अर्थात किसी भिन्न की समतुल्य भिन्न प्राप्त करने के लिए उसके अंश तथा हर में समान शून्येतर संख्या से गुणा अथवा भाग दिया जाता है।

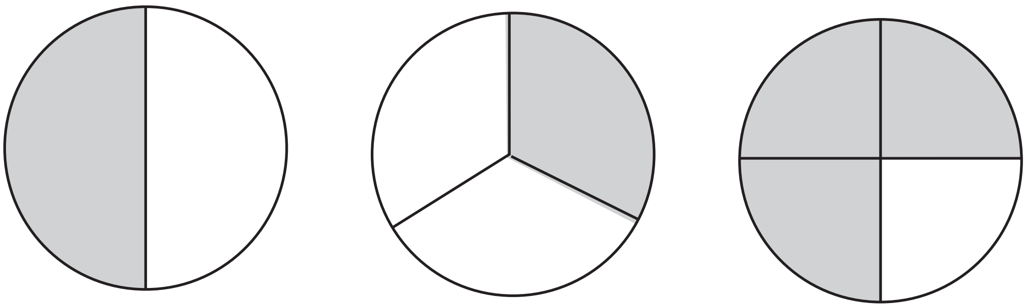
क्रियाकलाप :

1. $\frac{2}{3}$ के तीन समतुल्य भिन्न लिखिए।

2. $\frac{4}{12}$ के समतुल्य भिन्न लिखिए जिसमें हर 3 हो।

3. $\frac{6}{18}$ के दो समतुल्य भिन्न लिखिए जिनके हर 18 से कम हैं।

अब तीन बराबर वृत्ताकार कागज के टुकड़ों को क्रमशः दो, तीन तथा चार बराबर भागों में बांटे तथा उनके क्रमशः एक भाग, एक भाग तथा तीन भागों को रंगे और उन्हें भिन्न के रूप में प्रदर्शित करें।



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$

रंगे स्थानों को देखकर क्रमशः बड़े तथा छोटे भिन्नों को बतायें।

सबसे छोटी भिन्न $\frac{1}{3}$ फिर उसमें बड़ी $\frac{1}{2}$ तथा तीनों में सबसे बड़ी भिन्न $\frac{3}{4}$ है। इन भिन्नों के बड़े तथा छोटे होने की पहचान क्रमशः समतुल्य भिन्नों में परिवर्तित करके आसानी से की जा सकती है।

भिन्न $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{3}$ में यदि अंश बराबर है तो जिस भिन्न का हर बड़ा वह भिन्न छोटी तथा जिसका हर छोटा वह भिन्न बड़ी होती है। अतः $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

किन्तु भिन्नों $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{3}{4}$ की तुलना करने के लिए पहले इनके हर को समान बनाते हैं। भिन्नों के अंश तथा हर के समान संख्या से गुणा करके उनके हर को समान बनाते हैं।

$$\frac{1}{2} = \frac{1x6}{2x6} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1x4}{3x4} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3x3}{4x3} = \frac{9}{12}$$

इनमें सबसे छोटा अंश 4, उसके बाद 6 तथा सबसे बड़ा अंश 9 है। अतः सबसे छोटी भिन्न $\frac{1}{3}$ उससे बड़ी $\frac{1}{2}$ तथा सबसे बड़ी $\frac{3}{4}$ है। अर्थात $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ या $\frac{3}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

क्रियाकलाप :

1. भिन्नों $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ में बड़ी, छोटी तथा समतुल्य भिन्नों की पहचान करिए।
2. भिन्नों को छोटे से बड़े के क्रम में लिखिए।
   $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$

भिन्न की गणितीय संक्रियाएं-

समान हर के भिन्नों के योग में अंशों का जोड़ अंश के स्थान में लिखते है तथा हर वही रहता है

उदाहरण- $\frac{4}{9}+\frac{3}{9}=\frac{4+3}{9}=\frac{7}{9}$ (भिन्नों का योग)

समान हर होने पर अंशों को घटाकर अंश में लिखते हैं तथा हर पहले वाला ही लिखते हैं।

उदाहरण- $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$

इनके हर समान है।

$\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5-2}{7}=\frac{3}{7}$ (भिन्नों का घटाना)

समान हर के भिन्नों में योग = $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

अन्तर = $\frac{\text{अंशों का अन्तर}}{\text{हर}}$

दो भिन्नों का गुणा करते समय दोनों भिन्नों के अंश का अंश में तथा हर का हर में गुणा करते हैं।

उदाहरण - $\frac{6}{11} x \frac{22}{27}=\frac{6x22}{11x27}=\frac{4}{9}$ (भिन्नों का गुणा)

जब दो भिन्न संख्याओं का गुणनफल 1 होता है तो वे एक दूसरे की व्युत्क्रम (उल्टा) या गुणात्मक प्रतिलोम होती है।

संख्या 1 का व्युत्क्रम 1 ही होता है।

शून्य का कोई व्युत्क्रम या गुणात्मक प्रतिलोम नहीं होता है। जब संख्याएं 1 से बड़ी होती है। तो उनके व्युत्क्रम 1 से छोटे होते हैं तथा जब संख्याएं 1 से छोटी होती है तो उनके व्युत्क्रम 1 से बड़े होते हैं।

एक भिन्न में दूसरी भिन्न से भाग देना हो तो पहली भिन्न में दूसरी भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

उदाहरण - $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} x \frac{4}{1} = \frac{3}{1} = 1$$

किसी भिन्न को शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग देने का अर्थ है भिन्न को उस पूर्ण संख्या के बराबर हिस्सों में बांटना।

किसी भिन्न में शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग देने का अर्थ यह है कि भिन्न में उस शून्येतर पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम का गुणा करना। किसी भिन्न में भिन्न से भाग देते समय जिस भिन्न से भाग देना हो उसके व्युत्क्रम (उल्टा) से पहली भिन्न से गुणा कर देते हैं।

मूल्यांकन-

निम्नलिखित भिन्नों का गुणा कीजिए-

(1) (क) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ (ख) $\frac{7}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$ (ग) $\frac{11}{5} \times \frac{25}{22} \times \frac{13}{15}$

(2) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(क) $\frac{1}{8} \times 18 = \boxed{}$ (ख) $\frac{1}{13} \times \boxed{} = 1$

(ग) $7\frac{1}{2} \times \boxed{} = 1$ (घ) $\boxed{} \times \frac{5}{12} = 1$

(3) निम्नलिखित भिन्नों को जोड़िए-

(1) $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{7}{3}$ (2) $\frac{5}{4}, \frac{3}{4}$ तथा $\frac{9}{4}$

(4) निम्नलिखित भिन्नें को घटाइए-

(1) $\frac{8}{5} - \frac{6}{5}$ (2) $\frac{4}{3} - \frac{1}{3}$ (3) $\frac{5}{2} - \frac{7}{2}$

(5) भिन्नों को बढ़ते हुए क्रम में लिखिये-

$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{5}$

(6) हल कीजिए-

(1) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$ (2) $\frac{7}{3} \div \frac{3}{7}$ (3) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3}$

(7) दो संख्याओं का अन्तर $\frac{8}{13}$ है। छोटी संख्या है $\frac{105}{52}$ तो दूसरी संख्याा ज्ञात कीजिए।

(8) गीत ने $\frac{5}{2}$ किग्रा मिठाई 5 बच्चो में बराबर-बराबर बाँटी। प्रत्येक को कितने किग्रा मिठाई मिली ?

(9) एक कार एक लीटर पेट्रोल में 16 किमी जाती है तो $6\frac{3}{8}$ तीटर पेट्रोल में वह कितनी दूरी तय करेंगे ?

(10) $\frac{7}{5}$ का व्युत्क्रम है-

(1) $\frac{5}{7}$ (2) 1 (3) 5×7 (4) $\frac{1}{7 \times 5}$

इकाई - 4

दशमलव संख्या की अवधारणा, दशमलव संख्या में प्रयुक्त अंकों का स्थानीयमान तथा गणितीय संक्रियाएँ

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित के बारे में ज्ञान प्राप्त करेंगे-

- दशमलव की अवधारणा
- दशमलव संख्या में प्रयुक्त अंकों का स्थानीय मान
- दशमलव संख्याओं का जोड़
- दशमलव संख्याओं का घटाना
- दशमलव संख्याओं का गुणा
- दशमलव संख्याओं का भाग

दशमलव संख्या की अवधारणा-

किसी संख्या में इकाई के बाद जब दसवाँ (1/10) सौवाँ (1/100).......स्थानों पर कोई अंक लिखना हो तो इकाई और दसवाँ स्थान के बीच एक बिन्दु लगा दिया जाता है उसे दशमलव कहते हैं-

दशमलव संख्या में प्रयुक्त अंकों का स्थानीय मान-

दशमलव संख्या में प्रयुक्त अंकों का स्थानीयमान निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है। 432.562 को स्थानीयमान चार्ट पर दर्शाया गया है।

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशवाँ	सौवाँ	हजारवाँ
4	3	2	5	6	2

432.562 को चार सौ बत्तीस दशमलव पाँच छः दो पढ़ते हैं देखो सारणी में

संख्या चार का स्थानीय मान - 400

संख्या 3 का स्थानीय मान - 30

संख्या 2 का स्थानीय मान - 2

लेकिन दशमलव बिन्दु के बाद अंकों का स्थानीय मान-

संख्या पाँच का दसवाँ भाग

संख्या छः का सौवाँ भाग

संख्या का दो का हजारवाँ भाग

दशमलव संख्याओं का जोड़-

दशमलव संख्याओं का जोड़ भी सामान्य जोड़ की तरह ही करते हैं इस क्रिया में संख्याओं को ऊपर नीचे लिखते समय यह ध्यान रखते हैं कि दशमलव बिन्दु एक दूसरे के नीचे रहे।

$$\begin{array}{r} 9.25 \\ +\ 8.75 \\ \hline 18.00 \\ \hline \end{array}$$

दशमलव संख्याओं का घटाना-

दशमलव संख्याओं का घटाना भी सामान्य घटाने की तरह ही करते हैं इस क्रिया में संख्याओं को ऊपर नीचे लिखते समय यह ध्यान रखते हैं कि दशमलव बिन्दु एक दूसरे के नीचे ही रहे।

जैसे - 6.05 - 2.78 तथा 6.5 - 2.78

$$\begin{array}{r} 6.05 \\ -\ 2.78 \\ \hline 3.27 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6.50 \\ -\ 2.78 \\ \hline 3.72 \\ \hline \end{array}$$

दशमलव संख्याओं का गुणा-

दशमलव संख्या में 10,100 तथा 1000 से गुणा करने पर दशमलव बिन्दु अपने स्थान से क्रमशः एक, दो तथा तीन स्थान दाहिनी ओर हटकर गुणनफल देता है।

जैसे $1.25 \times 10 = 12.5$, $1.25 \times 100 = 125.0$ तथा, $1.25 \times 1000 = 1250.0$

$= 1250$

इसी प्रकार $0.2 \times 0.3 = \frac{2}{10} x \frac{3}{10} = \frac{2x3}{10x10} = \frac{6}{100} = 0.06$

अतः $0.2 \times 0.3 = 0.06$ तथा $0.02 \times 0.06 = 0.0012$

दशमलव संख्याओं का भाग-

दशमलव संख्या में 10,100 या 1000 का भाग देने पर दशमलव बिन्दु क्रमशः एक, दो या तीन स्थान बाईं ओर खिसक जाता है।

जैसे- (a) $\frac{125}{10} = 12.5$

(b) $\frac{125}{100} = 1.25$

(c) $\frac{125}{1000} = 0.125$

निम्नांकित उदाहरणों पर ध्यान दें-

(i) $\frac{2.624}{0.4}$

$\Rightarrow \frac{2.624}{0.400}$

$\Rightarrow \frac{2624}{400}$

$\Rightarrow$ 400) 2624 (6.56

$$\begin{array}{r} 2400 \\ \hline 2240 \\ 2000 \\ \hline 2400 \\ 2400 \\ \hline 0000 \end{array}$$

उत्तर - 6.56

(ii) $\frac{0.00355}{71}$

$\Rightarrow \frac{00355}{7100000}$

$\Rightarrow \frac{\cancel{00355}\ 71}{\cancel{7100000}\ 1420000}$

$\Rightarrow \frac{71}{1420000}$

$\Rightarrow \frac{1}{2000}$

2000) 100000 (0.00005

$$\begin{array}{r} 10000 \\ \hline 00000 \\ \hline \end{array}$$

उत्तर - 0.00005

मूल्यांकन-

निम्नलिखित को जोड़िए-

(1) (i) 0.3 + 0.4 (ii) 0.34 + 0.52 (iii) 4.17 + 0.58

(2) राम ने एक किताब ` 4.75 की तथा एक कापी ` 1.50 की खरीदी। बताओ उसने कुल कितने ` का सामान खरीदा।

निम्नलिखित का मान बताइए-

(3) (i) 4.25 - 3.45 (ii) 20.65 - 8.97 (iii) 5.15 - 1.28

(4) 17 डेसीमीटर में से 35 सेमी को घटाइए।

(5) ऋचा ने एक दुकान से हल्दी ` 4.75 की, नमक ` 5.00 की तथा धनिया ` 3.50 का और तेल ` 16.50 का खरीदा। यदि उसने ` 50 का नोट दिया हो तो दुकानदार उसे कितने रुपये लौटाएगा।

(6) (15 डेकामी - 95 सेमी.) का मान ज्ञात कीजिए।

(7) 0.04 x 0.5 का गुणनफल है-

(i) 0.20 (ii) 0.020 (iii) 0.0002 (iv) 0-0020

(8) (5.4 - 2.25) का मान होगा-

(i) 3.15 (ii) 3.25 (iii) 31.5 (iv) इनमें से कोई नहीं

इकाई-5

अपवर्तक (विभाजक), अपवर्त्य (गुणज), समापवर्तक तथा समापवर्त्य की अवधारणा

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित बिन्दुओं के बारे में जानकारी प्राप्त होगी-

- गुणनखंड तथा अपवर्तक (विभाजक) का ज्ञान
- अपवर्त्य (गुणज) संख्याओं का ज्ञान
- समापवर्तक तथा समापवर्त्य की अवधारणा

गुणनखंड-

आपको प्राकृतिक संख्याओं का ज्ञान भली-भाँति हो चुका है। जब आप 8 में 5 का गुणा करते हैं तो गुणनफल 40 प्राप्त होता है। यहाँ $8 \times 5 = 40$ में, 8 गुण्य, 5 गुणक तथा 40 गुणनफल है। 8 व 5 को 40 का गुणनखंड कहते हैं।

अपवर्तक-

एक प्रशिक्षु को 12 गोली दीजिए और इन्हें पंक्तियों में इस प्रकार व्यवस्थित करने को कहें कि प्रत्येक पंक्ति में गोलियों की संख्या समान हो। प्रशिक्षु गोलियों को निम्नांकित विधियों से व्यवस्थित कर सकता है-

1. प्रत्येक पंक्ति में 1 गोली

   पंक्तियों की संख्या = 12

   गोलियों की कुल संख्या = $1 \times 12 = 12$

2. प्रत्येक पंक्ति में 2 गोलियाँ

   पंक्तियों की संख्या = 6

   गोलियों की कुल संख्या = $2 \times 6 = 12$

3. प्रत्येक पंक्ति में 3 गोलियाँ

   पंक्तियों की संख्या = 4

   गोलियों की संख्या = $3 \times 4 = 12$

4. प्रत्येक पंक्ति में 4 गोलियाँ

   पंक्तियों की संख्या = 3

   गोलियों की संख्या = $4 \times 3 = 12$

5. प्रत्येक पंक्ति में 5, 7, 8, 9, 10, 11 गोलियाँ रखने पर प्रत्येक पंक्ति में गोलियों की संख्या समान नहीं होगी।

6. प्रत्येक पंक्ति में 6 गोलियाँ

   पंक्तियों की संख्या = 2

   गोलियों की संख्या = $6 \times 2 = 12$

7. प्रत्येक पंक्ति में 12 गोलियाँ, पंक्तियों की संख्या = 1

   गोलियों की संख्या = $12 \times 1 = 12$

इन संख्याओं में प्रशिक्षु देखता है कि 12 को दो संख्याओं के गुणनफलों के रूप में लिखा जा सकता है-

$1 \times 2 = 12$; $2 \times 6 = 12$; $3 \times 4 = 12$; $4 \times 3 = 12$; $6 \times 2 = 12$; $12 \times 1 = 12$

इस प्रकार 1, 2, 3, 4, 6 और 12 संख्या 12 के गुणनखंड या विभाजक हैं। इन्हें 12 के अपवर्तक कहा जाता है। अतः

कोई संख्या जिन-जिन संख्याओं से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती है वे संख्याएं उस संख्या की अपवर्तक कहलाती है।

आइए अब सारणी के माध्यम से अपवर्तक के कुछ रोचक तथ्यों पर विचार करते हैं-

संख्या	अपवर्तक
2	1, 2
8	1, 2, 4, 8
15	1, 3, 5, 15
70	1, 2, 5, 7, 70
84	1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

उपर्युक्त सारिणी को देखकर यह निष्कर्ष निकलता है कि-

- 1 प्रत्येक संख्या का अपवर्तक है।
- प्रत्येक संख्या स्वयं का अपवर्तक होती है।
- किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्तक उस संख्या का एक पूर्ण विभाजक है।
- किसी दी हुई संख्या के अपवर्तकों की संख्या सीमित होती है।
- किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्तक उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है।

अपवर्त्य (गुणज)-

किसी प्रशिक्षु से $3 \times 6 = 18$ लिखने को कहियें और इस तथ्य का बोध करायें कि 3 और 6 संख्या 18 के गुणनखंड हैं। इसे हम इस प्रकार भी कहते हैं कि यहाँ 18, संख्या 3 और 6 का गुणज अथवा अपवर्त्य (Multiple) है।

गुणज ↑

$3 \times 6 = 18$

↓ ↓

अपवर्तक

इसी प्रकार $48 = 4 \times 12$ यह दर्शाता है कि 4 और 12, संख्या 48 के अपवर्तक हैं तथा 48, 4 और 12 का एक अपवर्त्य है। अपवर्त्य को गुणज भी कहते हैं।

किसी संख्या में प्राकृतिक संख्याओं (1, 2, 3, ...) से गुणा करने पर उस संख्या के विभिन्न गुणज अथवा अपवर्त्य प्राप्त होते हैं।

जैसे- 2 के गुणज अथवा अपवर्त्य 2, 4, 6, ...

5 के गुणज अथवा अपवर्त्य 5, 10, 15, ...

16 के अपवर्त्य 16, 32, 48, 64, ... आदि।

अब प्रशिक्षुओं से निम्नांकित सारणी के माध्यम से अपवर्त्य के रोचक तथ्यों के बारे में चर्चा करें-

संख्या	अपवर्त्य
1	1, 2, 3, ...
8	8, 16, 24, ...
13	13, 26, 39, ...
18	18, 36, 54, ...
25	25, 50, 75, ...

उपरोक्त सारणी से यह निष्कर्ष निकलता है कि-

- कोई संख्या अपने प्रत्येक अपवर्तक का अपवर्त्य होती है।
- किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्त्य उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।
- प्रत्येक संख्या स्वयं का एक अपवर्त्य है।
- किसी संख्या के अपवर्त्यों की संख्या असीमित होती है।

यह भी जाने-

किसी भी संख्या में से उसके अंकों का योगफल घटाने पर प्राप्त अन्तर सदैव 9 का अपवर्त्य होता है।

उदाहरणार्थ कोई एक संख्या 4253 लेते हैं। अब देखते है कि इस संख्या के अंकों का योगफल

$$= 4 + 2 + 5 + 3 = 14$$

अब संख्या 4253 में से अंकों का योगफल 14 घटाने पर प्राप्त अन्तर

$$= 4253 - 14$$
$$= 4239$$
$$= 9 \times 471$$

अतः अंतर 9 का अपवर्त्य है।

समापवर्तक-

प्रशिक्षु इस तथ्य से परिचित हो चुके हैं कि किसी संख्या को पूर्णतया विभाजित करने वाली संख्या को उस संख्या का गुणनखंड कहते हैं और गुणनखंड को अपवर्तक भी कहा जाता है।

नीचे दी गई सारणी को देखकर निष्कर्ष निकालिए-

संख्या	अपवर्तक
48	1,2,3,4,6,8,12,16,24,48
64	1,2,4,8,16,32,64
72	1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72

तीनों संख्याओं के कौन-कौन से अपवर्तक समान हैं?

प्रशिक्षु उपरोक्त सारणी को देखकर निष्कर्ष निकालेगें कि तीनों संख्याओं में 2, 4 तथा 8 समान अपवर्तक है। इस प्रकार

समान अपवर्तक को ही समापवर्तक कहते हैं।

अतः उपरोक्त संख्या का समापवर्तक 2,4 व 8 है।

समापवर्त्य-

प्रशिक्षुओं ने जानकारी प्राप्त कर ली है कि समान अपवर्तकों को समापवर्तक कहते हैं। अब निम्न सारणी को ध्यान से देखिए-

संख्या	अपवर्त्य
3	3,6,9,12,15,18......
6	6,12,18,......
9	9,18,27,......

तीनों संख्याओं के कौन-कौन से अपवर्त्य समान हैं?

प्रशिक्षु सारिणी देखकर निष्कर्ष निकालेगें कि तीनों संख्याओं में संख्या 18 समान अपवर्त्य है।

संख्याओं के समान अपवर्त्यों को उनका समापवर्त्य कहते हैं।

अतः उपरोक्त संख्या का समापवर्त्य 18 है।

मूल्यांकन-

1. संख्या 4 के सभी अपवर्त्य लिखिए जो 35 से कम हों।
2. 96 किन-किन संख्याओं का अपवर्त्य है?
3. 36 के अपवर्तक ज्ञात कीजिए।
4. 45,60 व 75 के समापवर्तक ज्ञात कीजिए।
5. 496 के सभी अपवर्तकों को लिखियें।
6. संख्या 6 के सभी अपवर्त्य ज्ञात कीजिए जो 50 से कम हो।
7. निम्नांकित संख्याओं के प्रथम चार अपवर्त्य लिखिए-

   (i) 7 (ii) 14 (iii) 19 (iv) 37
8. निम्नांकित संख्या युग्मों के ऐसे समापवर्त्य ज्ञात जिनका मान 80 से कम हो-

   (i) 9 और 15 (ii) 6 और 10 (iii) 8 और 9 (iv) 7 और 11
9. निम्नांकित संख्याओं के प्रथम पाँच गुणज लिखिए-

   (i) 4 (ii) 8 (iii) 12 (iv) 35
10. निम्नांकित में से 15 किसका अपवर्तक है-

    (i) 3125 (ii) 112940 (iii) 151290

इकाई - 6

भाज्य तथा अभाज्य संख्याओं का अर्थ लघुतम समापवर्त्य तथा महत्तम समापवर्तक की अवधारणा

इस अध्याय में निम्नलिखित बिन्दुओं की जानकारी प्राप्त करेंगे-

1. भाज्य तथा अभाज्य संख्याओं का अर्थ, अभाज्य गुणनखंड
2. समापवर्तक तथा महत्तम समापवर्तक की अवधारणा
3. समापवर्त्य तथा लघुतम समापवर्त्य की अवधारणा
4. म0स0 तथा ल0स0 में सम्बन्ध

प्रशिक्षुओं ने अब तक प्राकृतिक संख्या गुणनखंड, अपवर्तक तथा अपवर्त्य के बारे में ज्ञान प्राप्त कर लिया है। अब वह अपवर्तक और अपवर्त्य से सम्बन्धित अन्य तथ्यों के बारे में जानना चाहेंगे।

भाज्य एवं अभाज्य संख्याएँ-

प्रशिक्षुगण निम्नलिखित दी गई सारणी की संख्या को देखकर विचार करें-

संख्या	अपवर्तक
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
9	1, 3, 9
11	1, 11
13	1, 13
18	1, 2, 3, 6, 9, 18

उपरोक्त सारणी से निष्कर्ष निकालिए-

- ऐसी कौन सी संख्या है जिसका अपवर्तक केवल एक संख्या है?
- किन संख्याओं के दो अपवर्तक है?
- किन संख्याओं के अपवर्तक दो से अधिक है?

निष्कर्ष-

- प्राकृतिक संख्या 1 का केवल एक मात्र अपवर्तक स्वयं 1 है।
- 2, 3, 11 और 13 के केवल दो भिन्न अपवर्तक हैं- 1 तथा वह संख्या स्वयं है।
- 4, 9, और 18 के दो से अधिक भिन्न अपवर्तक हैं।

अतः

- वे संख्याएँ जिनके केवल दो भिन्न अपवर्तक (1 तथा स्वयं वह संख्या) होते हैं, अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।
- वे संख्याएँ जिनके दो से अधिक भिन्न अपवर्तक होते हैं, भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।
- प्राकृतिक संख्या 1 न तो भाज्य है और न अभाज्य।
- सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 है।

1. प्रशिक्षुओं को निर्देशित कीजिए कि 50 तक की भाज्य एवं अभाज्य संख्याएँ लिखिए तथा निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए-

(i) सबसे छोटी अभाज्य संख्या कौन सी हैं?

(ii) सम अभाज्य संख्या कौन सी हैं?

(iii) विषय अभाज्य संख्या कौन सी है?

(iv) सभी भाज्य संख्याएँ लिखिए।

सह-अभाज्य संख्याएँ-

संख्या युग्म (2, 3), (4, 9), (11, 13) व (9, 25) के अपवर्तक लिखिए-

संख्या	अपवर्तक
2	1, 2
3	1, 3

संख्या	अपवर्तक
4	1, 2, 4
9	1, 3, 9

संख्या	अपवर्तक
11	1, 11
13	1, 13

संख्या	अपवर्तक
9	1, 3, 9
25	1, 5, 25

उपरोक्त सारणी को दिखाकर प्रशिक्षुओं से पूछिये कि -

- कौन सा अपवर्तक 2 और 3 दोनों में विद्यमान है?
- 9 और 25 के उभयनिष्ठ अपवर्तक बताइए।
- चारों संख्या युग्म में उभयनिष्ठ अपवर्तक बताइए।

इन सारणियों को देखकर स्पष्ट है कि इन संख्या-युग्मों में उभयनिष्ठ अपवर्तक केवल 1 है। ऐसी दो संख्याएँ सह-अभाज्य कहलाती है। अतः

> दो संख्याएँ सह-अभाज्य कहलाती है यदि उनमें 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ अपवर्तक (गुणनखंड) न हो।

अभाज्य गुणनखंड

संख्या $84 = 12 \times 7$; $84 = 4 \times 3 \times 7$ तथा $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ पर विचार कीजिए और बताइए कि-

(1) प्रथम गुणनफल में भाज्य व अभाज्य संख्या बताइए?

(2) द्वितीय गुणनफल में कितने गुणनखंड हैं? इनमें भाज्य व अभाज्य संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(3) तीसरे गुणनफल में भाज्य व अभाज्य संख्याएँ बताइए।

प्रशिक्षुओं ने देखा कि $84 = 12 \times 7$ में 7 अभाज्य व 12 भाज्य है। प्रशिक्षुओं ने देखा कि $84 = 4 \times 3 \times 7$ में तीन गुणनखंड है जिसमें 4 भाज्य व 3 तथा 7 अभाज्य संख्याएँ हैं। $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ में चार गुणनखंड है और चारों गुणनखंड अभाज्य संख्याएँ हैं। ऐसे गुणनखंड अभाज्य गुणनखंड कहलाते हैं। अतः

> यदि किसी संख्या के सभी गुणनखंड अभाज्य संख्याएँ हों, तो वे अभाज्य गुणनखंड कहलाते हैं।

महत्तम समापवर्तक-

क्रियाकलाप-

प्रशिक्षुओं से शिक्षक प्रश्न पूछें कि एक बोरे में 18 किग्रा बासमती चावल तथा दूसरे बोरे में 12 किग्रा सोनाचूर चावल है। दोनों प्रकार के चावलों को समान आकर के थैलों में इस प्रकार अलग-अलग भरा जाना है कि थैले चावल से पूरे-पूरे भरे जा सकें तथा थैलों की संख्या कम से कम हो। अतः इन छोटे थैलों में कितने किग्रा चावल भरा जा सकता है ?

प्रशिक्षुओं से भिन्न उत्तर प्राप्त होंगे जैसे थैलों की नाप इस प्रकार हो कि उसमें 1 किग्रा चावल, 2 किग्रा चावल, 3 किग्रा चावल या 6 किग्रा चावल आ सके। अब शिक्षक प्रशिक्षुओं के साथ विचार-विमर्श कर सकता है कि 1 किग्रा चावल रखने वाले

थैलों की संख्या 30 होगी, 2 किग्रा चावल रखने वाले थैलों की संख्या 15 होगी, 3 किग्रा चावल रखने वाले थैलों की संख्या 10 होगी और 6 किग्रा चावल रखने वाले थैलों की संख्या 5 होगी।

शिक्षक समझाये कि अधिक से अधिक द्रव्यमान 6 किग्रा है जिसके लिये समान आकार के कम से कम 5 थैलों की आवश्यकता होगी। यहाँ 3 थैलों में बासमती चावल एवं 2 थैलों में सोनाचूर चावल पूरा-पूरा भरा जा सकता है। इसी प्रकार के विभिन्न उदाहरणों से शिक्षक प्रशिक्षुओं से परिचर्चा करके महत्तम समावर्त्तक को दैनिक जीवन की घटनाओं से जोड़कर समझा सकता है।

आप सभी प्रशिक्षुओं ने देखा कि किसी संख्या को पूर्णतः विभाजित करने वाली संख्या उसका गुणनखंड कहलाती है। गुणनखंड को अपवर्तक भी कहा जाता है। दो या दो से अधिक संख्याओं के समान अपवर्तक को ही समापवर्तक कहते हैं। नीचे की सारणी देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास कीजिए-

संख्या	अपवर्तक
42	1,2,3,6,7,14,21,42
66	1,2,3,6,11,22,33,66
78	1,2,3,6,13,26,39,78

• तीनों संख्याओं के समापवर्तक कौन-कौन हैं?
• इन समापवर्तकों में से सबसे छोटा समापवर्तक कौन है?
• इन समापवर्तकों में से सबसे बड़ा समापवर्तक कौन है?

सभी प्रशिक्षुओं के द्वारा निष्कर्ष निकाला गया कि सबसे बड़ा समापवर्तक 6 है और यही तीनों संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होगा। 6 ही वह बड़ी से बड़ी संख्या है जो दी गई सभी संख्याओं को विभाजित करती है। अतः

महत्तम समापवर्तक दी गई संख्याओं का सबसे बड़ा सार्वविभाजक है।

महत्तम समापवर्तक को अंग्रेजी में Highest Common Factor (H.C.F) या Greatest Common Factor कहते हैं। महत्तम सार्वविभाजक के रूप में इसे Highest Common Divisor (H.C.D) या Greatest Common Divisor (G.C.D) भी कहते हैं।

गुणनखंड विधि से महत्तम समापर्वतक ज्ञात करना-

संख्या 48, 64 तथा 72 के अभाज्य गुणनखंड को देखिए-

$48 = 2\times2\times2\times2\times3$

$64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2$

$72 = 2\times2\times2\times3\times3$

उपरोक्त सभी संख्याओं का म0स0 $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

भाग विधि से महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना-

भाग-विधि से महत्तम समापवर्तक (म0स0) ज्ञात करने के लिए छोटी संख्या से बड़ी संख्या को भाग दिया जाता है। प्राप्त शेषफल से पुनः प्रथम भाजक में भाग दिया जाता है। यह प्रक्रिया शेषफल शून्य तक चलती रहती है। शेषफल शून्य आने पर अंतिम भाजक ही अभीष्ट म0स0 होगा।

उदाहरण 1 - 12 और 16 का म0स0 भाग-विधि से ज्ञात कीजिए।

हल

```
12) 16 (1
    12
     4 ) 12 ( 3
         12
          0
```

अतः म0स0 = 4

ध्यान दें - दो से अधिक संख्याएँ होने पर किन्हीं दो के म0स0 के साथ तीसरी संख्या का म0स0 ज्ञात करते हैं। यही क्रिया अगली संख्याओं के साथ भी करते हैं। अंतिम म0स0 ही अभीष्ट म0स0 होता है।

लघुतम समापवर्त्य-

क्रियाकलाप-

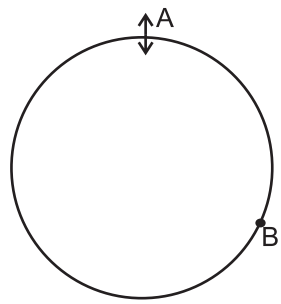
प्रशिक्षुओं से शिक्षक प्रश्न पूछें कि दो लड़के किसी वृत्ताकार मैदान का चक्कर लगाते हैं। पहला लड़का मैदान का एक चक्कर 4 मिनट में एवं दूसरा लड़का 6 मिनट में लगाता है। यदि दोनों एक ही स्थान से मैदान का चक्कर लगाना प्रारम्भ करते हैं तो कितने समय पश्चात वे पुनः प्रारम्भिक स्थान पर एक साथ होंगे।

जो भी प्रशिक्षु सही उत्तर 12 मिनट देते हैं शिक्षक उनसे कक्षा को तर्क सहित बताने के लिये कहें कि उन्होंने यह उत्तर कैसे सोचा। शिक्षक भी निम्नांकित तरीके से समझाने का प्रयास कर सकते हैं :

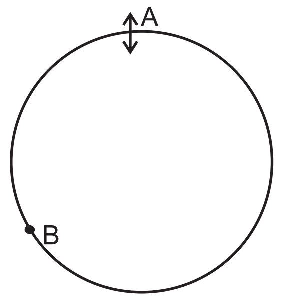
माना पहला लड़का A वृत्ताकार मैदान का चक्कर 4 मिनट तथा दूसरा लड़का B वृत्ताकार मैदान का चक्कर 6 मिनट में लगाता है।

पहला लड़का 4 मिनट में जब एक चक्कार लगा लेगा तब दूसरा लड़का मैदान के 2/3 भाग का ही चक्कर 4 मिनट में लगा पायेगा क्योंकि $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

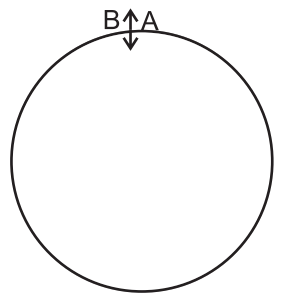
A दूसरा चक्कर लगाना प्रारम्भ कर देगा और अगले 4 मिनट (अर्थात् कुल 8 मिनट) में वह मैदान के दो चक्कर पूरे कर लेगा किन्तु B एक चक्कर पूरा करने के पश्चात् मैदान का $\frac{1}{3}$ भाग और पूरा कर लेगा क्योंकि $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ पुनः अगले 4 मिनट (अर्थात कुल 12 मिनट) में A मैदान के तीन चक्कर पूरे कर लेगा तथा B मैदान के 2 चक्कर पूरे कर लेगा क्योंकि $\frac{12}{6}=2$ । इस प्रकार 12 मिनट पश्चात् A और B दोनों प्रारम्भिक स्थान पर एक साथ होगे। शिक्षक पुनः बताये कि अगले हर 12 मिनट अर्थात 12 मिनट, 24 मिनट 36 मिनट .... पर दोनों लड़के प्रारम्भिक स्थान पर एक साथ होंगे यदि वे अपनी-अपनी एक समान गति से मैदान का चक्कर लगायें किन्तु 12 मिनट सबसे कम समय है जिसमें वे चक्कार लगाना प्रारम्भ करने के पश्चात् पुनः एक साथ होगे। इस प्रकार शिक्षक अन्य उदाहरणों की सहायता से लघुत्तम समातवर्त्य को दैनिक जीवन की घटनाओं से जोड़कर समझा सकता है।



4 मिनट बाद की स्थिति



8 मिनट बाद की स्थिति



12 मिनट बाद की स्थिति

आप सभी ने एक ही संख्या के असीमित अपवर्त्य ज्ञात किया है। आप यह भी जानते हैं कि संख्याओं के समान अपवर्त्यों को उनका समापवर्त्य कहते हैं। इन समापवर्त्यों में से सबसे छोटा समापवर्त्य ही उनका लघुतम समापवर्त्य (ल0स0) होता है।

अतः

- संख्याओं के समान अपवर्त्यों को उनका समापवर्त्य कहते हैं।
- संख्याओं के समापवर्त्यों में से सबसे छोटा समापवर्त्य ही उनका लघुतम समापवर्त्य (ल0स0) होता है।
- संख्याओं का ल0स0 उन संख्याओं में से प्रत्येक द्वारा पूर्णतः विभाज्य होता है।

अंग्रेजी में लघुतम समापवर्त्य को Lowest Common Multiple (L.C.M.) कहा जाता है।

अभाज्य गुणनखंडों द्वारा ल0स0 ज्ञात करना-

संख्या 16,32 और 40 का ल0स0 ज्ञात करने के लिए सभी के अभाज्य गुणनखंड लिखिए-

$16 = 2\times2\times2\times2 \quad = 2^4$

$32 = 2\times2\times2\times2\times2 \quad = 2^5$

$40 = 2\times2\times2\times5 \quad = 2^3 \times 5$

ल0स0 $= 2^5 \times 5 = 32 \times 5 = 160$

भाग विधि से ल0स0 ज्ञात करना-

संख्या 14, 28, 35 तथा 56 का ल0स0 निम्न विधि के द्वारा ज्ञात करते हैं-

2	14, 28, 35, 56
2	7, 14, 35, 28
2	7, 7, 35, 14
5	7, 7, 35, 7
7	7, 7, 7, 7
	1, 1, 1, 1

अतः ल0स0 $= 2\times2\times2\times5\times7=280$

दो संख्याओं के महत्तम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य में सम्बन्ध

निम्नलिखित सारणी को देखिये-

प्रथम संख्या	द्वितीय संख्या	म0स0	ल0स0	म0स0 × ल0स0	प्रथम संख्या × द्वितीय संख्या
6	8	2	24	2×24=48	6×8=48
30	36	6	180	6×180=1080	30×36=1080
35	40	5	280	5×280=1400	35×40=1400

उपर्युक्त सारणी को देखने से निष्कर्ष निकलता है कि -

> दो संख्याओं के म0स0 और ल0स0 का गुणनफल उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात्
>
> म0स0 × ल0स0 = प्रथम संख्या × द्वितीय संख्या

मूल्यांकन-

निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए-

1. दो अंकों की बड़ी से बड़ी अभाज्य संख्या बताइए।
2. 1728 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए।
3. 625, 3125 तथा 15625 का म0स0 गुणनखंड विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।
4. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 49, 59 और 109 में भाग देने पर क्रमशः 1, 3 और 5 शेष रहे।
5. 16, 44 तथा 64 के ल0स0 ज्ञात कीजिए।
6. वह छोटी से छोटी संख्या बताइए जो 20, 25, 30 और 40 से पूर्णतः विभाज्य हो।
7. वह छोटी से छोटी संख्या बताइए जिसमें 75, 80 और 135 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 3 शेष बचें।
8. दो संख्याओं का म0स0 16 तथा उनका गुणनफल 6400 है। उनका ल0स0 ज्ञात कीजिए।

इकाई - 7

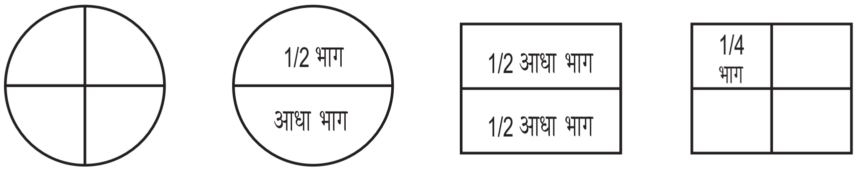
प्रतिशत का अर्थ तथा संकेत तथा प्रतिशत ज्ञात करना

इस इकाई को पढ़ने के बाद निम्नलिखित की जानकारी होगी-

- भिन्न संख्या का ज्ञान
- दो राशियों की तुलना करने का ज्ञान
- प्रतिशत का अर्थ व संकेत का ज्ञान
- प्रतिशत ज्ञात करने का ज्ञान

दैनिक जीवन के अनेक कार्यों में गिनने की आवश्यकता पड़ती है। गिनती करने वाली संख्याएँ 1,2,3,4,..... प्राकृतिक संख्याएँ कहलाती हैं। क्या हमारा कार्य केवल गिनने से चल सकता है। आइए यह स्थिति देखिए-

एक प्रशिक्षु से एक कागज के पेज को दो बराबर भाग में मोड़ने को कहें और पूछिए कि प्रत्येक भाग को क्या कहेंगे? पुनः आधे मुड़े भाग को बीच से मोड़कर चार बराबर-बराबर भागों में बाँटने को कहें। इस प्रकार प्रत्येक भाग पेज का चौथाई भाग है।



अब संकेतों के रूप में इन भागों को अर्थात् आधे भाग को 1/2 तथा चौथाई भाग को 1/4 के रूप में प्रकट करते हैं। इस प्रकार के संकेत को भिन्न कहते हैं।

पूरी वस्तु के जितने बराबर-बराबर भाग किये गये उन्हें 'हर' शब्द से प्रकट करते हैं तथा जितने भागों को लेते हैं उसे 'अंश' शब्द से प्रकट करते हैं।

दो राशियों की तुलना-

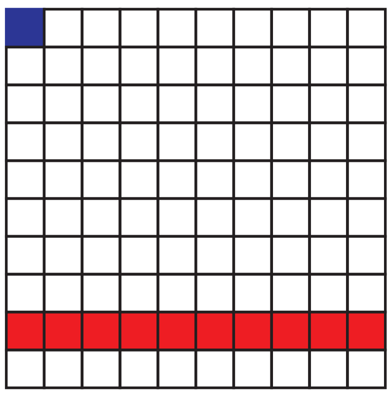
(1) प्रशिक्षुओं से निम्नांकित दो कक्षाओं के परीक्षाफल की तुलना करायें-

कक्षा	परीक्षार्थियों की संख्या	उत्तीर्ण परीक्षार्थियों की संख्या
3	56	42
4	60	48

प्रशिक्षुओं से उत्तीर्ण परीक्षार्थियों की तथा परीक्षार्थियों की संख्या में तुलना करायें तथा निष्कर्ष निकलवाएँ कि किस कक्षा का परीक्षाफल तुलनात्मक अच्छा है?

दो राशियों की तुलना करने के लिए दोनो राशियों को एक ही इकाई में होना चाहिए।

प्रतिशतता:-



संलग्न वर्ग को सौ बराबर छोटे भागों में बाँटा गया है।

चित्र को देखकर बताइये-

एक छोटा भाग पूरे वर्ग का कौन सा भाग है?

10 छोटे भाग पूरे खानों का कौन सा भाग हैं?

पार्श्वांकित चित्र को देखकर निष्कर्ष निकलता है कि एक छोटा भाग वर्ग का सौवां भाग है। इसी प्रकार 10 छोटे खाने पूरे वर्ग का 10 वाँ भाग है।

एक सौवाँ को 1/100 या 1 प्रतिशत कहते हैं। तथा

प्रतिशत को चिन्ह % से प्रदर्शित करते हैं।

प्रतिशतता ज्ञात करना-

भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए भिन्न को ऐसी समतुल्य भिन्न में बदलते हें, जिसका हर 100 हो। ऐसी भिन्न में ततपश्चात् 1/100 के स्थान पर % का चिन्ह लगा देते हैं।

• भिन्न 3/5 को प्रतिशत में बदलिए।

भिन्न $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} x \frac{100}{100}$

$= \frac{300}{5} x \frac{1}{100}$

$= 60\%$

• इसे भी देखिए-

100 में से 5 $= \frac{5}{100}$ या $5 x \frac{1}{100} = 5\%$

$\frac{7}{35} = \frac{7}{35} x \frac{100}{100} = \frac{700}{35} x \frac{1}{100} = 20\%$

इसी प्रकार

$40\% = \frac{40}{100} = 40 x \frac{1}{100}$

$25.2\% = \frac{25.2}{100} = 25.2 x \frac{1}{100}$

अतः

1/100 को प्रतिशत के चिन्ह (%) के रूप में लिखा जाता है।
100 का 8% = 8, यहाँ 100 के आधार पर प्रतिशतता 8 है।

प्रतिशत को भिन्न में बदलना-

$20\% = 20 x \frac{1}{100} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$35\% = 35 x \frac{1}{100} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

$30\% = 30 x \frac{1}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिए प्रतिशत की संख्या में प्रतिशत के चिन्ह (%) के स्थान पर 1/100 से गुणा करके सरल कर लेते हैं।

उदाहरण 1- भिन्न 4/5 को प्रतिशत में बदलिए।

उदाहरण 2- एक दुकानदार के पास 2 दर्जन पेंसिल थी। इन पेंसिलों में से 9 पेंसिल बिक गयी। कुल कितने प्रतिशत पेंसिल की बिक्री हुई?

उदाहरण 3- 15% व 45% को भिन्न के सरलतम रूप में लिखिए।

दशमलव को प्रतिशत में बदलना-

0.25 को प्रतिशत में बदलिए।

$$0.25 = 0.25x\frac{100}{100} = (0.25x100)x\frac{1}{100} = 25\%$$

इसी प्रकार

$$0.015 = 0.015x\frac{100}{100} = (0.015x100)x\frac{1}{100} = 1.5\%$$

दशमलव संख्या को प्रतिशत मे बदलने के लिए दशमलव को दो स्थान दायीं ओर खिसकाते हुए संख्या को प्रतिशत के चिन्ह के साथ लिखते हैं।

अभी तक आपने प्रतिशत के बारे में प्रारंभिक जानकारी प्राप्त की है। अब किसी राशि का दिये गये प्रतिशत के अनुसार मान ज्ञात करने की विधि के बारे में चर्चा करेंगे।

1. विवेक ने वार्षिक परीक्षा में 85% अंक प्राप्त किये। यदि पूर्णांक 500 हो, तो विवेक को कितने अंक मिले?

   विवेक का प्राप्तांक = 500 का 85%

   = 500 × 85%

   = 500 × 85 × 1/100

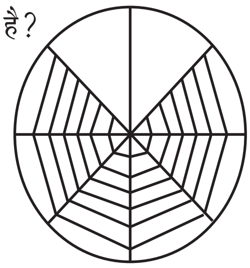
   = 425

2. 600 का 90% कितना होगा?

3. एक गाँव की जनसंख्या 5000 है। यदि इसमें महिलाओं की संख्या 60% हो, तो गाँव में कुल कितनी महिलायें हैं?

एक राशि को दूसरी राशि के प्रतिशत के रूप में प्रदर्शित करना

प्रशिक्षुओं को पार्श्वांकित चित्र को दिखाते हुए चर्चा कीजिए कि चित्र का कितने प्रतिशत भाग छायांकित है?



चित्र में वृत्त के 8 भागों में से 6 भाग अर्थात् 6/8 भाग छायांकित हैं अर्थात्

$$\frac{6}{8} = \frac{6}{8}x\frac{100}{100} = \frac{600}{8}x\frac{1}{100} = 75\%$$

चर्चा कीजिए-

- निधि ने वार्षिक परीक्षा में 500 में से 430 अंक प्राप्त किये। उसे कुल कितने प्रतिशत अंक मिले?
- रहीम ने गणित में 50 में से 35 अंक तथा हिन्दी में 60 में से 48 अंक प्राप्त किये। रहीम को किस विषय में अच्छे अंक मिले हैं?
- एक परीक्षा में 80% शिक्षार्थी उत्तीर्ण हुए। यदि परीक्षा में 1600 शिक्षार्थी बैठे हों, तो कुल कितने शिक्षार्थी उत्तीर्ण हुए?

बढ़ा हुआ एवं घटा हुआ प्रतिशत ज्ञात करना-

आजकल के परिवेश में दिन-प्रतिदिन मूल्यों में वृद्धि व कमी होती रहती है। इन कमियों और वृद्धि को निम्न उदाहरणों द्वारा भँलीभाँति समझा जा सकता है।

1. डीजल का मूल्य ` 35 प्रति लीटर था। अब उसका मूल्य बढ़कर ` 42 प्रति लीटर हो गया। डीजल के मूल्य में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?

   डीजल का बढ़ा मूल्य = वर्तमान मूल्य प्रतिलीटर - पूर्व का मूल्य प्रति लीटर

   = 42 - 35

   = ` 7 प्रति लीटर

$$\text{मूल्य में प्रतिशत वृद्धि} = \frac{\text{मूल्य में वृद्धि}}{\text{पहले का मूल्य}} \times 100$$

$$= \frac{7.0}{35.0}x100 = \frac{700}{35} = 20$$

$\therefore$ मूल्य में वृद्धि = 20%

2. आलू का मूल्य ` 20.0 प्रति किग्रा था। उसका मूल्य घटकर ` 15.0 प्रति किग्रा हो गया। आलू के मूल्य में कितने प्रतिशत की कमी हुई?

आलू के मूल्य में कमी = (20 - 15) प्रति किग्रा

= ` 5.0 प्रति किग्रा

आलू के मूल्य में प्रतिशत कमी = $\frac{\text{मूल्य में कमी}}{\text{पहले का मूल्य}} \times 100$

$= \frac{5}{25} \times 100$

$= \frac{500}{20}$

$= 25$

मूल्य में कमी = 25%

इस तरह आपने देखा कि

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{बढ़ा \%} = \dfrac{\text{बढ़ा मूल्य}}{\text{पहले का मूल्य}} \times 100 \\ \text{घटा \%} = \dfrac{\text{घटा मूल्य}}{\text{पहले का मूल्य}} \times 100 \end{array}}$$

मूल्यांकन

1. निम्नलिखित को प्रतिशत में बदलिए-

(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $2\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{2}{25}$

2. निम्नलिखित को प्रतिशत में बदलिए-

(i) 0.12 (ii) 0.04 (iii) 0.015 (iv) 2.25

3. दशमलव भिन्न में बदलिए-

(i) 45% (ii) 24.5% (iii) 17.5%

4. कितना होगा-

(i) 500 का 75% (ii) 2.5 मीटर का 15%

(iii) 450 किग्रा का 135 किग्रा (iv) ` 80 का ` 20

5. अजय ने बाजार से 3 दर्जन केला खरीदा। यदि 20% केला खराब निकल गया तो शेष अच्छे बचे केलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

6. एक बाग में 30% पेड़ जामुन के हैं। शेष आम के हैं। यदि बाग में पेड़ों की कुल संख्या 600 हो, तो आम के पेड़ों की संख्या कितनी होगी।

7. एक शिविर में 400 सैनिक थे। 40 सैनिक और आ गये। सैनिकों में कितने प्रतिशत की वृद्धि हो गयी?

8. एक छड़ 72 सेमी लम्बी थी। इसमें से 8 सेमी काटकर खूंटी बना दी गयी। छड़ अब कितने प्रतिशत छोटी हो गयी?

9. एक दुकान में ` 1200 का कम्बल 20% छूट देकर बेचा गया। ज्ञात कीजिए कि कम्बल कितने में बेचा गया ?

10. एक कक्षा में 60 विद्यार्थी थे। 60% विद्यार्थी प्रथम श्रेण, 20% विद्यार्थी द्वितीय श्रेणी तथा शेष विद्यार्थी तृतीय श्रेणी में उत्तीर्ण हुए। प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय श्रेणी में उत्तीर्ण विद्यार्थियों की अलग-अलग संख्या लिखिए।

इकाई - 8

अवर्गीकृत आँकड़ों का पिक्टोग्राफ, बार-ग्राफ तथा पाई-ग्राफ द्वारा निरूपण

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नलिखित की जानकारी प्राप्त होगी-

(1) अवर्गीकृत आँकड़ों का अर्थ

(2) पिक्टोग्राफ का निरुपण

(3) बार-ग्राफ का निरुपण

(4) पाई-ग्राफ का निरुपण

आपने टेलीविजन पर क्रिकेट मैच अवश्य देखा होगा। क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों के नाम व स्कोर-कार्ड भी अवश्य देखा होगा। गेंदबाजों द्वारा लिया गया विकेट, फेंके गये ओवर तथा बल्लेबाजों द्वारा बनाया गया रन सभी स्कोर बोर्ड पर अंकित रहता है। इसी प्रकार दैनिक जीवन में संख्याओं की सारिणी के रूप में वस्तु और उसके मूल्य, रेल के आने-जाने का समय तथा बस के आने जाने का समय आदि को भी देखा होगा। ये सारिणयाँ हमें आँकड़े (Data) उपलब्ध कराते हैं।

- आँकड़े, संख्याओं के वे संग्रह हैं जो कुछ सूचनाएँ देने के लिए एकत्रित किये जाते हैं।
- किसी निश्चित उद्देश्य से आँकड़े एकत्रित किए जाते हैं।

अवर्गीकृत आँकड़े-

हमें प्रतिदिन विभिन्न स्रोतों जैसे समाचार पत्र-पत्रिकाओं, विज्ञापनों सूचना तंत्र के विविध माध्यमों रेडियो, दूरदर्शन आदि से विभिन्न प्रकार की सूचनाएँ मिलती रहती हैं। इन सूचनाओं का सम्बन्ध जीवन के प्रत्येक क्षेत्र से होता है। इन सूचनाओं में से जो तथ्य संख्यात्मक रूप में एकत्र किये जाते हैं, वे आँकड़े कहलाते है। आपने विभिन्न स्थितियों में कुछ विशिष्ट सूचनाओं के लिए आँकड़े एकत्र करना सीखा है। आँकड़ों का संग्रह, आलेखन और प्रस्तुतीकरण निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं।

मानलीजिए कि आपके कक्षा के 20 प्रशिक्षुओं के गणित विषय में 50 पूर्णांक में प्राप्तांकों का विवरण निम्नवत् है-

37, 30, 15, 29, 20, 25, 42, 40, 16, 23, 14, 22, 26, 27, 38, 24, 19, 31, 43, 28

यदि 17 या अधिक अंक प्राप्त करने वाले प्रशिक्षु को उत्तीर्ण माना जाय तो इन प्राप्तांकों को देखकर क्या तुरन्त यह बताया जा सकता है कि-

(1) कितने प्रशिक्षु उत्तीर्ण हुए?

(2) कितने प्रशिक्षु अनुत्तीर्ण हुए?

(3) कितने प्रशिक्षुओं ने 25 अथवा इससे अधिक अंक प्राप्त किए हैं?

ध्यान दीजिए कि मूल रूप में एकत्र किये गये आँकड़ों को देखकर इनसे सीधे कोई निष्कर्ष आसानी से प्राप्त नहीं किया जा सकता है। प्रायः जिस मूलरूप में आँकड़े एकत्र किये जाते हैं, वे अव्यवस्थित होते हैं। ऐसे आँकड़ों को अपरिष्कृत अथवा अवर्गीकृत आँकड़ें भी कहते हैं।

आँकड़ों का चित्रारेख या पिक्टोग्राफ द्वारा प्रदर्शन

हमारे दैनिक जीवन में प्रायः विभिन्न प्रकार के आँकड़े सुनने और पढ़ने में आते हैं। जैसे भारत की जनसंख्या 100 करोड़ से अधिक हो गयी है। सभी के लिए भोजन वस्त्र, आवास, पेयजल, चिकित्सा, शिक्षा तथा रोजगार आदि की समुचित व्यवस्था करना आवश्यक है। इन सबके लिए एक सुविचारित योजना बनानी होगी। नीति निर्धारण के लिए आँकड़े संकलित किये जाते हैं। इन आँकड़ों को कैसे प्रदर्शित कर सकते हैं?

सामान्य रूप से आँकड़ों का आरेखीय निरूपण किया जाता है। इस प्रकार के प्रदर्शन को चित्रारेख प्रदर्शन अथवा पिक्टोग्राफ

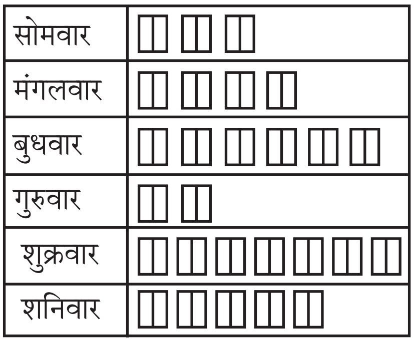
कहते हैं।

आँकड़ों के चित्रों द्वारा प्रदर्शन को चित्ररेख या पिक्टोग्राफ कहते हैं।

उदाहरण : नीचे दी गई सारणी करीम की स्टील की आलमारी की दुकान में सप्ताह के छः दिनों की बिक्री दर्शाती हैः

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
बिक्री	3	4	6	2	7	5

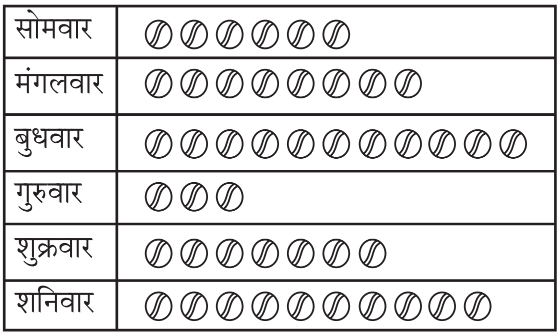
उपर्युक्त आँकड़ों को पिक्टोग्राफ द्वारा प्रदर्शित किया गया है। यहाँ = एक आलमारी



पिक्टोग्राफ को देखकर निष्कर्ष निकालना

एक दुकानदार के द्वारा विभिन्न दिनों में बेंचे गये गेंदो की संख्या नीचे दर्शाई गई हैः-

= दो गेंद



चित्रारेख को देखकर निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए?

(i) किस दिन बेंचे गये गेंदों की संख्या अधिकतम है?

(ii) शनिवार को कितने गेंद बेची गई?

(iii) दुकानदार द्वारा कुल कितना गेंद बेंचा गया?

(iv) किस दिन सबसे कम बिक्री हुई ?

(v) यदि एक गेंद 3 रुपये में बेंचा गया तो बुधवार को कुल कितने रुपये की बिक्री हुई?

उपरोक्त चित्रारेख को देखकर प्रश्नों का उत्तर निम्नवत् होगा-

(i) बुधवार को

(ii) 20 गेंद

(iii) 90 गेंद

(iv) गुरुवार को

(v) 66 रुपये की

इस प्रकार चित्रारेख को देखकर निष्कर्ष प्राप्त कर सकते हैं।

आँकड़ों का बार-ग्राफ द्वारा निरुपण-

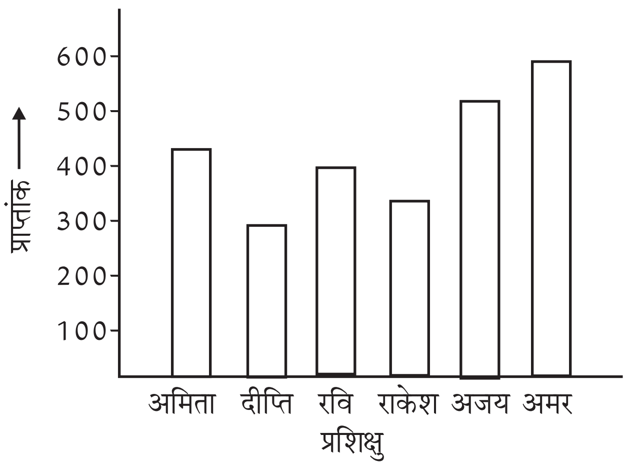
पहले आपने आँकड़ों का चित्ररेख द्वारा प्रदर्शन करना सीखा है। आप देखते हैं कि आँकड़ों का इस प्रकार प्रदर्शन करने में अधिक समय भी लगता है और आकर्षक चित्र बनाना भी कठिन कार्य है। अतः प्रतीक चित्रों के स्थान पर दंडारेख या बार-ग्राफ द्वारा सांख्यिकीय आँकड़ों का प्रदर्शन करना अधिक सरल है।

दण्डारेख में एक समान चौड़ाई के क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर दंड (bars) खींचे जाते हैं। जिनके बीच की दूरी समान रखी जाती है। इस प्रकार खींचे गए प्रत्येक दंड की लम्बाई दी हई संख्या (मान) को निरुपित करती है। आँकड़ों को प्रस्तुत करने का यह चित्रीय निरुपण दंड आरेख (bar diagram) या दंड आलेख (bar graph) कहलाता है।

नीचे दिये गये आँकड़े छः प्रशिक्षुओं द्वारा पूर्णांक 600 में से प्राप्त किये गये कुल अंकों को दर्शाते हैं-

प्रशिक्षु	अमिता	दीप्ति	रवि	राकेश	अजय	अमर
प्राप्तांक	450	300	400	350	500	550

पैमाना 1 सेमी = 100 अंक

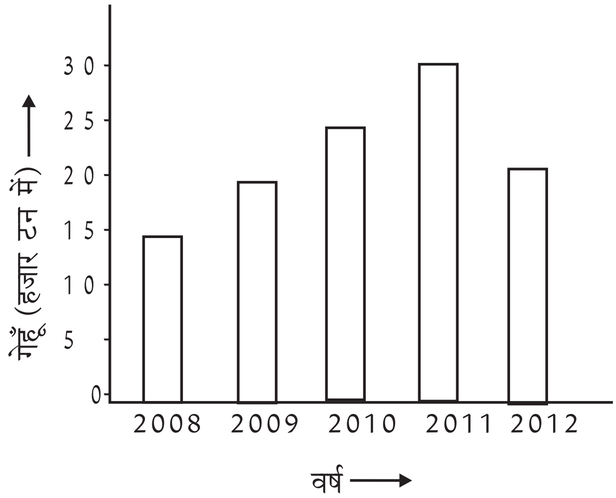


ध्यान दीजिए कि आँकड़ों में प्रशिक्षुओं को ऊर्ध्वाधर अक्ष और प्राप्त प्राप्तांकों को क्षैतिज अक्ष में भी अंकित करके दंडारेख निरुपित किया जा सकता है।

दंड आरेखों को पढ़ना-

निम्नांकित दंड आरेख वर्ष 2008-12 में सरकार द्वारा खरीदी गए गेहूँ की मात्रा दर्शाता है-

पैमाना 1 सेमी. = 5 हजार टन



उपर्युक्त दंड आरेख को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए-

(i) किस वर्ष गेहूँ की अधिकतम मात्रा खरीदी गई और कितनी?

(ii) किस वर्ष में गेहूँ की न्यूनतम मात्रा खरीदी गई?

(iii) वर्ष 2012 में गेहूँ की कितनी मात्रा खरीदी गई?

उपरोक्त दंडारेख का निष्कर्ष निम्नवत् है-

(i) वर्ष 2011 में, 30 हजार टन

(ii) वर्ष 2008 में

(iii) 20 हजार टन

इस प्रकार दंडारेख को देखकर निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं।

वृत्तारेख या पाई ग्राफ का निरुपण-

आप अवर्गीकृत आँकड़ों के पिक्टोग्राफ तथा दंडारेख बनाना तथा उनसे निष्कर्ष निकालना सीख चुके हैं। वृत्तारेख या पाईग्राफ द्वारा आँकड़ों का निरुपण भी एक सशक्त माध्यम है। इस प्रकार के प्रदर्शन में आँकड़ों को किसी वृत्त के त्रिज्य खंडों के द्वारा प्रस्तुत किया जाता है। अतः आप कह सकते हैं कि-

वृत्तारेख या पाइग्राफ निरुपण में साँख्यिकीय आँकड़ों को वृत्त द्वारा प्रदर्शित करते हैं, जिसमें आँकड़ों को त्रिज्य खंडों द्वारा निरुपित किया जाता है।

वृत्त आरेख सम्पूर्ण और उसके भागों में सम्बन्ध दर्शाता है। सम्पूर्ण वृत्त को त्रिज्य खंडों में विभाजित किया जाता है और प्रत्येक त्रिज्य खंड माप उसके द्वारा निरुपित सूचना के समानुपाती होती है। त्रिज्यखंड एक पाई की फाँकों के समान है, अतः इसे पाई-चार्ट या पाई आरेख कहते हैं।

नीचे दी गई सारणी में टेलीविजन के विभिन्न ब्राण्डों को क्रय करने वाले ग्राहकों की संख्या निम्नवत् है-

ब्राण्ड	A	B	C	D	E
संख्या	40	20	15	15	10

सभी ब्राण्डों के ग्राहकों के लिए केन्द्रीय कोणों की माप की गणना निम्नवत् ढंग से की जा सकती है-

ब्राण्ड	ग्राहकों की संख्या	त्रिज्यखंड का कोण
A	40	$\frac{40}{100} x 360^0 = 144^0$
B	20	$\frac{20}{100} x 360^0 = 72^0$
C	15	$\frac{15}{100} x 360^0 = 54^0$
D	15	$\frac{15}{100} x 360^0 = 54^0$
E	10	$\frac{10}{100} x 360^0 = 36^0$
योग	100	

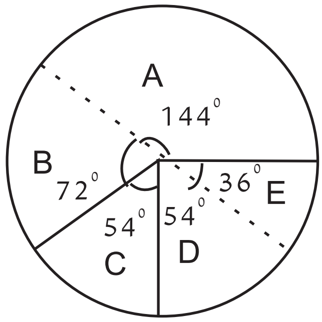
• अब सुविधानुसार कोई त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए।

• पुनः वृत्त में कोई त्रिज्या खींचकर वृत्त के आन्तरिक क्षेत्र में चाँदे की सहायता से 144° के केन्द्रीय कोण के त्रिज्य खंड खींचिए।

• इसके पश्चात् 72°, 54°, 54° व 36° के केन्द्रीय कोण के त्रिज्यखंड खींचिए।

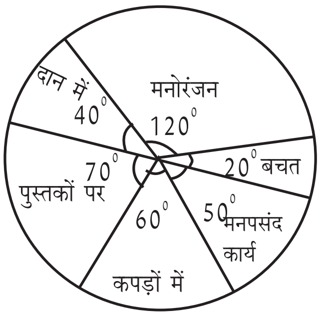
• संगत त्रिज्य खंड में क्रय किये गये ब्राण्ड के नाम लिखिए।

• चित्र को आकर्षक बनाने के लिए विभिन्न रंगों से रंग दीजिए।



पाई ग्राफ को पढ़ना-

अनन्या ने अपने मासिक जेब खर्च को निम्नांकित ढंग से व्यय किया। इसे पाई ग्राफ द्वारा प्रदर्शित किया गया है-



उपर्युक्त पाई ग्राफ देखकर उत्तर दीजिए-

(i) सबसे अधिक व्यय किस मद पर किया गया है?

(ii) सबसे कम धन किस मद में हैं?

उपर्युक्त पाई-ग्राफ से उपरोक्त निष्कर्ष इस प्रकार निकाला जा सकता है-

(i) मनोरंजन पर

(ii) बचत में

मूल्याँकन-

1. विभिन्न वर्षों में एक संस्थान के प्रशिक्षुओं की कुल संख्या निम्नलिखित सारणी द्वारा प्रदर्शित है :

वर्ष	2008	2009	2010	2011	2012
प्रशिक्षुओं की संख्या	400	300	500	600	700

उपरोक्त सारणी से एक संकेत  = 100 प्रशिक्षु लेकर एक चित्रारेख बनाइए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए-

(i) वर्ष 2010 में कुल प्रशिक्षुओं को कितने संकेत निरुपित कर रहे हैं?

(ii) वर्ष 2008 में कुल प्रशिक्षुओं के लिए कितने संकेत प्रयुक्त हुए?

2. अजय के विभिन्न विषयों के प्राप्तांकों का प्रतिशत निम्नवत् है-

हिन्दी	अंग्रेजी	गणित	विज्ञान	सामाजिक विज्ञान
38	45	75	80	90

उपर्युक्त आँकड़ों को बार ग्राफ द्वारा निरुपित कीजिए।

3. पंचायत भवन के प्रांगण में वृत्ताकार क्षेत्र में विभिन्न फूलों के पौधे लगे हैं। इसमें आधे क्षेत्र में गुलाब, एक तिहाई क्षेत्र में गेंदा तथा शेष में डहेलिया के पौधे हैं। इसको पाई-ग्राफ द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

4. अनिल की दुकान पर जनवरी से जून तक बेचे गये पंखों की संख्या सारणी में दी गई है-

जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून
10	15	25	40	50	70

आँकड़ों को पिक्टोग्राफ द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

5. नीचे दी गई सारणी में विभिन्न खेलोंमें रूचि रखने वाले किसी विद्यालय के शिक्षार्थियों की संख्या दी गई है-

खेल	फुटबाल	हॉकी	क्रिकेट	कबड्डी	शतरंज
शिक्षार्थियों की संख्या	100	120	180	200	50

इकाई - 9

सजातीय तथा विजातीय बीज गणितीय व्यंजको का बोध, इनका जोड़ एवं घटाना

इस इकाई के अध्ययन से निम्नांकित के बारे में ज्ञान प्राप्त होगा-

1. चर की अवधारणा को स्पष्ट कराना।
2. अज्ञात संख्याओं को चर द्वारा निरुपित कराना।
3. बीजीय व्यंजकों में मौलिक संक्रियाओं की विधियों का बोध कराना।
4. बीजीय व्यंजक सम्बन्धी अवधारणाओं तथा उन पर संक्रियाओं का मूल्यांकन कराना।

संख्याओं के लिए अक्षरों का प्रयोग-

अधिकांश लोग गणित से घबराते हैं, विशेष कर बीजगणित से। वे यह मानते हैं कि बीज गणित करने के लिए काफी पेंचीदा सूत्रों का प्रयोग करना पड़ता है। इन्हें याद रखना कठिन है। प्रशिक्षुओं में बीजगणित के प्रति इस भ्रांति को कैसे दूर किया जा सकता है?

प्रारम्भ में गणना कार्य के लिए अंकों एवं संख्याओं, भिन्नों, दशमलव संख्याओं आदि का ज्ञान पर्याप्त था। किन्तु आगे चलकर ऐसी स्थिति आयी जबकि अज्ञात संख्याओं एवं राशियों को ज्ञात करने के लिए विभिन्न चित्रों, संकेतों एवं प्रतीकों का प्रयोग करना आवश्यक हो गया। भाषा वर्णाक्षरों का अज्ञात संख्याओं के स्थान पर प्रयोग होने लगा। इन अक्षरों के भिन्न-भिन्न सन्दर्भों में अलग-अलग मान होने के कारण इन्हें 'बीज' कहा गया। 'बीज' के प्रयोग से विकसित गणित को बीजगणित कहा जाता है।

इस इकाई में यह प्रयास किया गया है कि प्रशिक्षुओं को बीज (अक्षर संख्या) की सही अवधारणा दें जिससे प्रशिक्षुओं में बीज गणित के प्रति रुचि उत्पन्न हो सके।

क्रियाकलाप-1

(i) प्रशिक्षुओं को एक डिब्बा दिखाते हुए पूछें कि इसमें कितनी गोलियाँ हैं।

एक प्रशिक्षु अनुमान से 5 गोलियां, दूसरा 6 गोलियां और तीसरा 12 गोलियां आदि बता सकते हैं। कुछ यह भी कह सकते हैं कि उनहें पता नहीं है कि डिब्बे में कितनी गोलियां हैं।

(ii) इन गोलियों को अलग रखते हुए कहें कि आप पुनः उतनी गोलियां डिब्बे में डाल रहे हैं।

(iii) प्रशिक्षुओं से पूछें कि इन गोलियों को भी पहले वाली गोलियों के साथ मिलाने पर कुल कितनी गोलियां हो जायेंगी?

(iv) इस बार भी अलग-अलग उत्तर प्राप्त होंगे, जो सही उत्तर से सामान्यतया भिन्न होंगे।

(v) प्रशिक्षुओं को बतायें कि भिन्न-भिन्न संख्याओं का अनुमान करने के स्थान पर डिब्बे में पहली बार डाली गयी संख्या x मान लें। अब दोनों बार की गोलियां मिलाने पर गोलियों की संख्या $x + x$ हो जायेगी।

(vi) प्रशिक्षुओं को स्पष्ट करें कि वे गोलियों की संख्या के लिए 'x' के स्थान पर कोई भी अन्य अक्षर (जैसे-क,ख,ग,र,ल,च,a,b,x,y......आदि), जिसे वे चाहें, ले सकते है।

क्रिया कलाप - 2

(i) दो प्रशिक्षुओं को खड़ा करें। कहें कि एक के पास 20 गोलियां हैं और दूसरा उसे कुछ गोलियाँ और दे देता है। अब उसके पास कितनी गोलियां हो गयीं?

(ii) प्रशिक्षुओं को उत्तर देने में कठिनाई का अनुभव होगा क्योंकि वे नहीं जानते कि दूसरे ने वास्तव में कितनी गोलियाँ दीं।

(iii) उनसे कहें कि वे यह मान लें कि दूसरे ने x गोलियां दी थीं। (उपयुक्त होगा यदि प्रशिक्षु ही कोई अक्षर बतायें)

(iv) अब प्रशिक्षु आसानी से गोलियों की संख्या x+10 या 10+x बता सकेंगे।

इस प्रकार अज्ञात संख्याओं को अक्षर संख्या (बीजीय संख्या या चर) के रूप में ग्रहण करने में प्रशिक्षुओं को कठिनाई का अनुभव नहीं होगा। इसके लिए वे कोई अक्षर (जैसे-क,ख,ग,a,b,x,y) ले सकते हैं जो एक या एक से अधिक संख्याओं को निरुपित करता है।

बीजीय व्यंजक की अवधारणा-

उपर्युक्त क्रिया कलाप (2) में कुल गोलियों की संख्या $x+10$ है

कोई अक्षर संख्या अथवा मौलिक गणितीय संक्रियाओं से युक्त अक्षर संख्याओं का समूह बीजीय व्यंजक कहे जाते हैं।

प्रशिक्षुओं से व्यंजकों का निम्नांकित प्रकार उदाहरण देकर उनकी अवधारणा को स्पष्ट कर दें-

$3x+5y$ में $3x$ तथा $5y$ दो पद हैं।

$4x-7y-8$ में $4x, -7y$ और -8 तीन पद हैं।

यहाँ पर x, y को चर और 8 अचर राशि कहते हैं।

सजातीय और विजातीय पद-

प्रशिक्षुओं को व्यंजक $3x+4y+x$ पर विचार करने को कहें। यह स्पष्ट करायें कि इस व्यंजक में तीन पद हैं। किन्तु प्रथम और तृतीय पदों में समानता है। दोनों में बीज x प्रयुक्त हुआ और x प्रथम घात में हैं। ऐसे पद सजातीय कहे जाते हैं। सजातीय पदों को आपस में जोड़-घटाकर व्यंजक को सरल किया जा सकता है। जैसे-

$$3x+4y+x = 3x+x+4y$$
$$= 4x + 4y$$

$4x + 4y$ का योगफल अब और सरल नहीं किया जा सकता क्योंकि x और y अलग-अलग संख्यायें निरुपित करते हैं, इस प्रकार व्यंजक $3x+4y+x$ में दूसरा पद $4y$, प्रथम और तृतीय पदों से विजातीय है। इस प्रकार किसी व्यंजक में सजातीय और विजातीय पद हो सकते हैं।

$2x^3+4x^2+x$ में तीनों पद विजातीय हैं। क्यों?

प्रशिक्षुओं को ही कारण बताने को कहें।

प्रशिक्षुओं से $4xy+3z+5y-7xy+y$ में सजातीय एवं विजातीय पदों को छटवाएँ।

प्रशिक्षुओं से विभिन्न बीजीय व्यंजकों के उदाहरण स्वतः देने और उनमें सजातीय और विजातीय पदों को बताने को कहें।

पदों के सजातीय होने के लिए यह आवश्यक है कि पदों में न केवल चरों की समानता होनी चाहिए बल्कि उनकी घातें भी समान होनी चाहिए।

मूल्यांकन-

1. $3x^2-4xy+12xy-6xz$ में सजातीय पद कौन-कौन है?
2. $2x^2+5y+y^2-y+6$ में सजातीय पदों को एक साथ लेते हुए व्यंजक को सरल कीजिए।

बीजीय व्यंजकों की संक्रियायें-

1. व्यंजकों को जोड़ना-घटाना- व्यंजकों का जोड़ एवं घटाना दो प्रकार से सिखाया जाय। पहले स्तम्भों में सजातीय पदों को लिखकर तत्पश्चात् क्षैतिज रूप में सजातीय पदों को एकत्र कर व्यंजक को सरल करना सिखाइए।

व्यंजकों का ऊर्ध्वाधरतः योग करते समय सजातीय पदों को एक ही स्तम्भ में एक के नीचे दूसरे को लिया जाता है। ध्यान रहे कि प्रत्येक पद अपने चिन्ह के साथ लिखा जाय।

जैसे - $2xz - 3z + u$ और $xz - 2z$ का योग निम्नलिखित प्रकार से कराएँ-

$$\begin{array}{r} 2xz - 3z + u \\ +\ \ xz - 2z \\ \hline 3xz - 5z + u \\ \hline \end{array}$$

इन व्यंजकों को क्षैतिज रूप में एक ही पंक्ति में लिखकर सजातीय पदों को एकत्र करके उनका योगफल ज्ञात करायें।

जैसे-

$$\begin{aligned}(2xz - 3z + u) + (xz - 2z) \\ &= 2xz - 3z + u + xz - 2z \\ &= 2xz + xz - 3z - 2z + u \\ &= 3xz - 5z + u\end{aligned}$$

इस प्रकार के कई उदाहरण लेकर प्रशिक्षुओं को व्यंजकों को जोड़ने की प्रक्रिया से परिचित करायें। इसी विधि से दो से अधिक व्यंजकों का भी जोड़ करायें।

व्यंजकों का घटाना करते समय इस बात का ध्यान देना चाहिए कि जिस व्यजंक को घटाना है, उसके पदों के चिन्हों को विपरीत चिन्हों में बदल दिया जाता है अर्थात् + को - और - को + में बदलकर सजातीय पदों को एकत्र किया जाता है और उनका योगफल ज्ञात कर लिया जाता है।

ऐसा क्यों किया जाता है? विचार करें।

प्रशिक्षुओं को पूर्णांकों का योग और अंतर का ज्ञान कराया जा चुका है। वे जानते हैं कि -(-2) = +2, -(-3) =+3, -(+2) = -2 और - (+3) = -3 इत्यादि

इसी जानकारी को बीजीय पदों के सन्दर्भ में प्रयुक्त कराएँ। जैसे-

$-(-x) = +x$ और $-(+x) = -x$

$2x-3y+z$ में से $x+2y-z$ को घटाने की संक्रिया कराएँ-

(ऊर्ध्वाधरतः)

$$\begin{array}{r} 2x-3y+z \\ \underline{\overset{}{_-}\, x \underset{-}{+} 2y \underset{+}{-} z} \\ \underline{x-5y+2z} \end{array}$$

(क्षैतिजतः)

$$\begin{aligned}&(2x-3y+z) - (x+2y-z) \\ &= 2x-3y+z-x-2y+z \\ &= x-5y+2z\end{aligned}$$

मूल्यांकन-

सजातीय तथा विजातीय व्यंजकों का बोध, जोड़ना, घटाना

1. निम्नांकित व्यंजकों में से सजातीय व्यंजक है-

   (1) $2x, 3y$ (2) $2x, 2y$ (3) $2x, 3x$ (4) इनमें से कोईनहीं

2. निम्नांकित व्यंजकों में से सजातीय व्यंजक है-

   (1) $2x^3, 2xy^3$ (2) $4x^4y, 4xy^3$ (3) $7x^2y^2z, 7x^2zy^2$ (4) इनमें से कोई नहीं

3. निम्नांकित व्यंजकों में से विजातीय व्यंजक है-

   (1) $3x, 3x$ (2) $7y, 7y$ (3) z, z^2 (4) इनमें से कोई नहीं

4. निम्नांकित व्यंजकों में से विजातीय व्यंजक है-

   (1) $3x^2y, 2yx^2$ (2) $7x^3yz, x^3zy$ (3) $3xy, 4yx$ (4) इनमें से कोई नहीं

5. 6 और p का योगफल है-

   (1) 6p (2) $6+p$ (3) $p-6$ (4) इनमें से कोई नहीं

6. x में से 9 घटाने पर प्राप्त होगा-

(1) $\frac{x}{9}$ (2) $x-9$ (3) $x+9$ (4) इनमें से कोई नहीं

7. निम्नांकित व्यंजकों में से द्विपदीय व्यंजक है-

(1) $17y^5$ (2) $2xy+x$ (3) $x+y+p$ (4) इनमें से कोई नहीं

8. निम्नांकित व्यंजकों में पदों की संख्या है-

(1) $5y$ (2) $72x - 7y$

9. व्यंजकों $x-y$ और $x+y$ को जोड़िए।

10. $5xy-y+9$ में से $xy+8$ को घटाइएँ।

11. व्यंजक $2x-y$ में क्या जोड़ें कि इस व्यंजक का मान 500 हो जाये ?

इकाई - 10

बिन्दु, रेखा, रेखाखण्ड, तल, तलखण्ड, वक्र, किरण तथा कोण की संकल्पना

इस इकाई में बिन्दु, रेखा, रेखाखण्ड, तल, तलखण्ड, वक्र, किरण तथा कोण का सम्बोध प्रशिक्षुओं को कराया जायेगा।

बिन्दु-

1. प्रशिक्षुओं से कागज पर पेंसिल की बारीक नोंक को लगवाकर अथवा बारीक पिन या सुई की नोंक को हल्के से चुभोकर एक चिन्ह बनवाएँ।

प्रशिक्षुओं को स्पष्ट करें कि-

बिन्दु की एक स्थिति होती है जिसका स्थान चिह्न द्वारा सुनिश्चित किया जाता है।

2. प्रशिक्षुओं द्वारा कागज पर निम्न प्रकार से कुछ बिन्दु अंकित करवाएँ तथा उन्हें अक्षरों A, B, C, D आदि द्वारा व्यक्त करवाएँ।

•B

•D

•A

•C

3. गणित किट से शंकु, घन, घनाभ, वर्ग के मॉडल निकलवाएँ। इनके शीर्षों को दिखाकर तथा स्पर्श कराकर बिन्दु का सम्बोध करायें।

इसी प्रकार अन्य प्रकार का उदाहरण लेकर प्रशिक्षुओं को बिन्दु की अवधारणा को स्पष्ट करें।

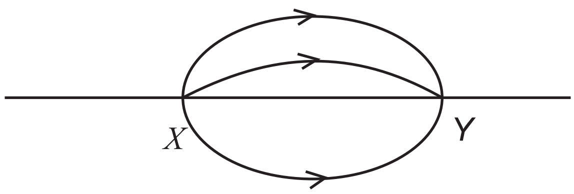
रेखा-रेखाखण्ड-

प्रशिक्षुओं से निम्नलिखित क्रिया कलाप करवाएँ-

1. कागज का एक टुकड़ा लेकर उसे मोड़ने को कहे फिर मोड़ को खोलने पर बनी सीधी क्रीज देखने को कहें।
2. धागा या तार को दोनों हाथों की दो अंगुलियों के बीच खींचकर दिखाएं तथा प्रशिक्षुओं को उसी प्रकार खींच कर देखने को कहें।
3. पुस्तक के एक पन्ने के किनारे को दिखाकर रेखाखण्ड के सम्बोध स्पष्ट करें।
4. प्रशिक्षुओं से पटरी तथा पेंसिल की बारीक नोंक से कागज पर रेखा खिंचवाएँ। उस पर दो बिन्दु X तथा Y अंकित कराएं। स्पष्ट करें कि इस रेखा का नाम XY है।

उपर्युक्त उदाहरणों में यदि रेखाखण्ड के दोनों अंत्य बिंदुओं को बहुत दूर तक ले जायें तो यह रेखाएं कहलायेंगी।

5. प्रशिक्षुओं को स्पष्ट करें कि X से Y तक पहुँचने के अनेक मार्ग हैं। एक चलित दूरी न्यूनतम है, चित्र से स्पष्ट है XY न्यूनतम दूरी वाला रेखाखण्ड है।



तल-तलखण्ड

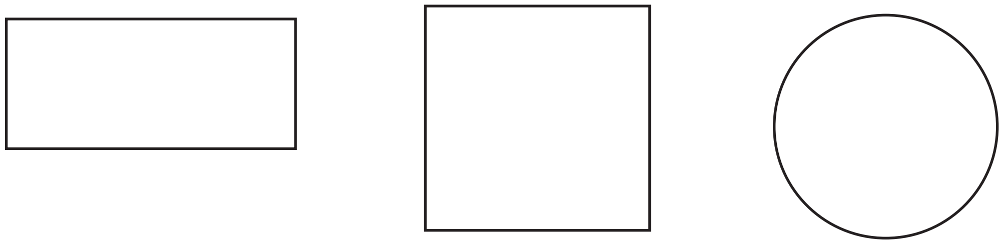
1. प्रशिक्षुओं को विद्यालय कक्ष की चारों दीवारों, पुस्तक का पन्ना, घनाभ के छः फलकों, मेज का ऊपरी भाग आदि देखने को कहें तथा इनसे तल के भाग का सम्बोध कराएं।

प्रशिक्षुओं को बोध कराएं कि-

घनाभ का एक फलक एक विशाल तल का अंग है, जो चारों दिशाओं में अनिश्चित रूप से फैला है। इस सम्बोध को समझने के लिए निम्नलिखित क्रिया कलाप करायें-

गणित किट से घनाभ, घन, बेलन के मॉडल निकलवाएँ तथा इन्हें कागज पर रखकर उनके चारों ओर पेंसिल से निशान बनाने को कहें।

इस प्रकार कागज पर आयत, वर्ग और वृत्त के चित्र प्राप्त होते हैं।

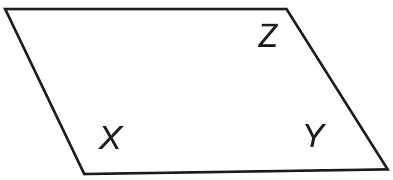


गणित किट की अनुपलब्धता की दशा में अपने आस-पास में उपलब्ध वस्तुएँ जैसे दियासलाई का डिब्बा, लूडो का पासा, रुपये का सिक्का आदि का प्रयोग किया जा सकता है।

उपर्युक्त चित्रों से स्पष्ट करें कि-

1. ये सभी एक तल में है।
2. इन सबके तल तथा कागज का तल एक बड़े तल के अंग हैं जिन पर इन्हें बनाया गया है।

समतल का नाम तीन या तीन से अधिक असंरेख बिन्दुओं द्वारा व्यक्त किया जाता है, जैसे निम्नांकित चित्र में दिए समतल का नाम XYZ है।

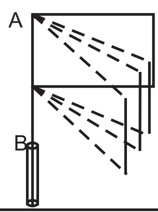


क्रियाकलाप-

एक कागज लकर इसे बीच से मोड़िए। मोड़ वाले भाग (क्रीज) पर दो बिन्दु A और B लीजिए। मुड़े हुए कागज से कितने तल बन सकते हैं ? कागज के क्रीज को स्थिर रखते हुए कागज के दोनों भागों को मोड़ के चारों तरफ घुमाइए। आप देखेंगे कि कागज के तल की स्थिर क्रीज AB पर भिन्न-भिन्न स्थितियाँ बनती हैं और प्रत्येक स्थिति एक समतल को निरूपित करती है। इस प्रकार जैसे-जैसे कागज को घुमाते हैं वैसे-वैसे नये समतल निरूपित होते है। फलतः क्रीज के परितः कागज को घुमाकर असंख्य समतल बनाये जा सकते हैं।

निष्कर्ष : दो बिन्दुओं से होकर असंख्य समतल जाते हैं।

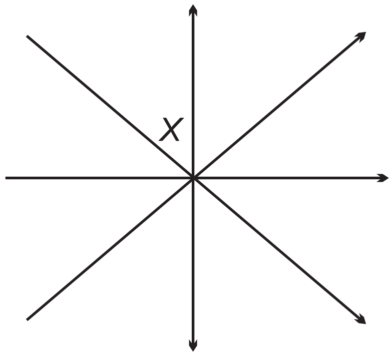
आप उपरोक्त क्रियाकलाप को हाथ के पंखें के द्वारा भी समझ सकते है जिसमें हत्थे (क्रीज AB) के चारें तरफ पंखें को घुमाकर पंखें की भिन्न-भिन्न स्थितियों में अलग-अलग समतल प्राप्त कर सकते है।



प्रशिक्षुओं को निम्नांकित क्रिया कलापों द्वारा तल के प्रगुण स्पष्ट करने को कहें-

1. दो बिन्दुओं से होकर अनेक तल खींचे जा सकते हैं, जैसे दीवार
2. तीन बिन्दुओं से केवल एक ही तल खींचा जा सकता है।

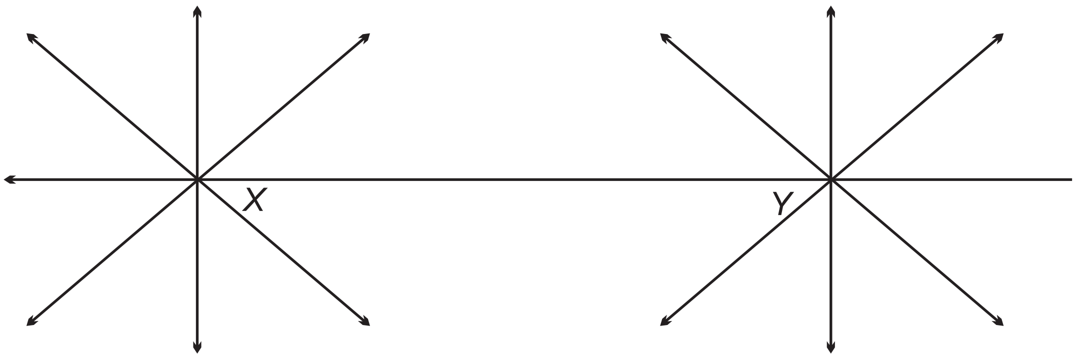
3. कागज के तल पर एक बिन्दु X लेने को कहें। बिन्दु X से जाने वाली विभिन्न रेखाएं खिंचवाएं जैसा कि निम्नांकित चित्र में प्रदर्शित है।



उपर्युक्त चित्र से निष्कर्ष निकलवाएँ कि-

समतल में दिए बिन्दु से जाने वाली रेखाओं की संख्या असंख्य है। ये सभी रेखायें कागज के तल पर स्थित हैं।

4. प्रशिक्षुओं से कागज के तल में दो बिन्दु X और Y लेने को कहें। बिन्दु X से जाने वाली अनेक रेखाएं खिंचवाएं। ठीक इसी प्रकार बिन्दु Y से जाने वाली अनेक रेखाएं खिंचवाएँ, जैसा कि निम्नांकित चित्र में प्रदर्शित है-



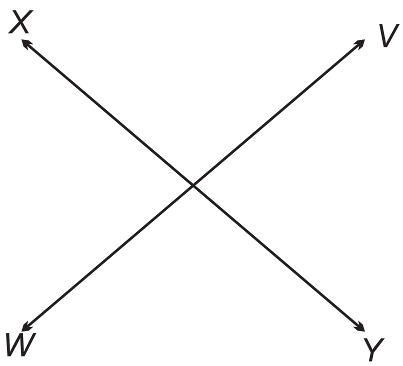
उपुर्यक्त चित्र से निष्कर्ष निकलवाएँ कि-

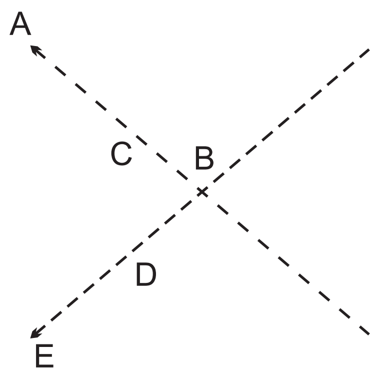
तल में दिए दो बिन्दुओं से एक और केवल एक रेखा खींची जा सकती है, जो पूर्णतः उसी तल में होती है, जिसमें दोनों बिन्दु स्थित है।

रेखा का नाम दो बिन्दुओं से लिखने का औचित्य इसी प्रगुण के आधार पर है।

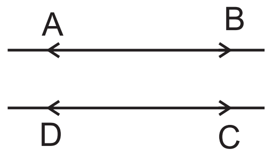
प्रशिक्षुओं से कागज पर रेखाओं के कई जोड़े खींचने को कहें तथा इसकी सहायता से स्पष्ट करें कि इनकी निम्नलिखित दो स्थितियों में से कोई एक ही हो सकती है-

जोड़े की दोनों रेखाएँ या तो परस्पर प्रतिच्छेदित करती हैं अथवा जोड़े की दोनों रेखाएं प्रतिच्छेदित नहीं करती है। जैसा कि निम्नांकित चित्रों से स्पष्ट है-





परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाली रेखाएँ



परस्पर प्रतिच्छेदित न करने वाली रेखाएँ

एक ही तल में स्थित दो रेखाएँ जो प्रतिच्छेदित नहीं करती हैं उन्हें समान्तर रेखाएँ कहते हैं।

उपर्युक्त प्रकार के दो और चित्रों को खिंचवाकर निकलवाएं कि-

एक ही तल में स्थित दो रेखाएं परस्पर प्रतिच्छेदित करती हैं अथवा समान्तर होती हैं।

मेज के संलग्न किनारे एक तल में स्थित परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाली रेखाओं के उदाहरण है। कमरे के आयताकार फर्श के कोने को दिखाकर समझने में सहायता करें कि उस कोने से जाने वाली तीन कोरों में से कोई दो कोरें एक ही तल में स्थित परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाली रेखाओं के उदाहरण हैं।

पटरी के दोनों किनारे, मेज की ऊपरी आयताकार भाग के दोनों सम्मुख किनारे, आयत की आमने-सामने की भुजाएं दो समान्तर रेखाओं के उदाहरण हैं।

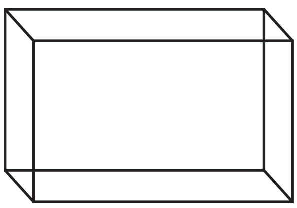
क्रियाकलाप-

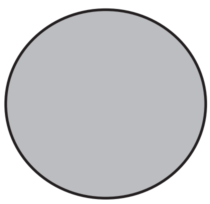
1 गणित किट के उपकरण तथा पर्यावरण में उपलब्ध वस्तुओं से प्रश्न पूँछकर बिन्दु, रेखा, रेखाखण्ड तथा तल दर्शाने को कहें।

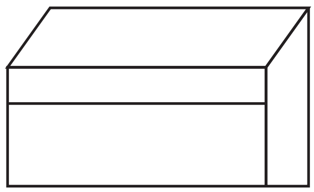
2. घनाभ के मॉडल से एक तल की परस्पर प्रतिच्छेदित दो रेखाओं के बारें में पूछे।

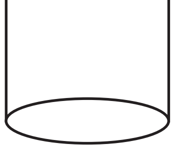
वक्र :

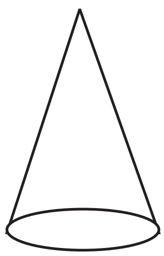
हम दैनिक जीवन में अपने आस-पास अनेक आकार की वस्तुओं को देखते हैं। ये आकार वक्रों या रेखाओं से मिलकर बने होते हैं। आइए हम नीचे दी गई वस्तुओं की आकृतियों को देखें और सोचें।

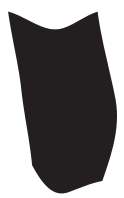

घनाभ


गोला


बॉक्स


बेलन

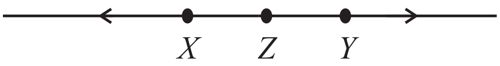

शंकु


पत्थर का टुकड़ा

- चित्र में घनाभ तथा बॉक्स की आकृति को देखने से ज्ञात होता है कि प्रत्येक के 6 पृष्ठ हैं जिन्हें फलक कहते हैं। प्रत्येक फलक के चार कोने हैं जिन्हें शीर्ष कहते हैं।
- गोला की आकृति को देखिए, इसमें कोई स्पष्ट फलक नहीं है। अतः इनके तल वक्र है। इसे वक्रतल या वक्र पृष्ठ कहते हैं।
- बेलन, शंकु में कोई सीधा किनारा नहीं है, बेलन और शंकु का आधार वृत्ताकार है, यह तल सपाट सा समतल है। बेलन के सिरे तथा शंकु के आधार के तलों को छोड़कर शेष तल वक्र है। पत्थर के टुकड़े का ऊपर वाला तल वक्र है।

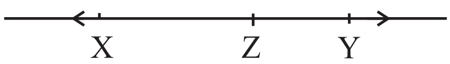
किरण-

1. प्रशिक्षुओं से पटरी, पेंसिल की सहायता से एक रेखा XY खींचने को कहें।

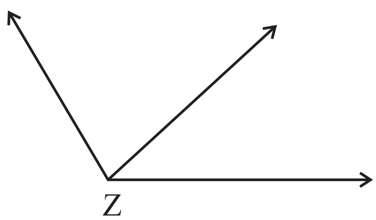


इस रेखा के मध्य में एक बिन्दु Z लेने को कहें। प्रशिक्षुओं को समझने में सहायता करें कि रेखा का बिन्दु 'Z' के दाहिने वाला भाग ZY एक किरण तथा 'Z' के बायें वाला भाग ZX दूसरी किरण है। किरणों ZX और ZY का निगमन बिन्दु Z है।

2. प्रशिक्षुओं से निम्नांकित रेखा से तीन किरणें के नाम बताने को कहें जिनके निगमन बिन्दु अलग-अलग हैं।



3. ऐसी तीन किरणें खींचने को कहें जिनके निगमन बिन्दु एक हों।



प्रशिक्षुओं से एक रेखा खींचने को कहें तथा उस पर दो बिन्दु X तथा Y अंकित करवाकर XY का नाम पूछे।

प्रशिक्षुओं निम्नलिखित तीन भाग बताएंगे-

(i) बिन्दु X से बायीं ओर निकली किरण

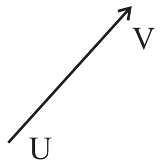
(ii) बिन्दु Y से दायीं ओर निकली किरण

(iii) बिन्दु X तथा Y के बीच का भाग XY।

प्रशिक्षु को बोध करायें कि-

रेखा के खण्ड XY को XY रेखाखण्ड कहते हैं, जिसके अन्त्य बिन्दु X और Y हैं यही क्रियाकलाप एक रेखा पर तीन बिन्दु लगवाकर करवाएँ। रेखा खण्ड XY को संकेत $\overline{XY}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

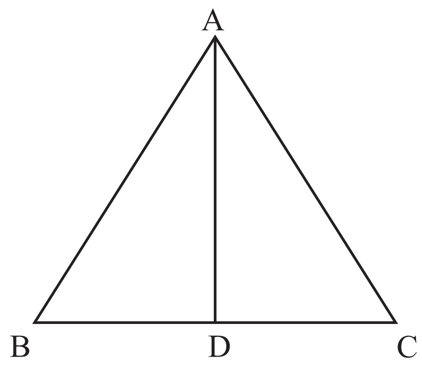
4. प्रशिक्षुओं से कोई तीन रेखा खण्ड खिंचवायें तथा उनके नाम लिखने को कहें।

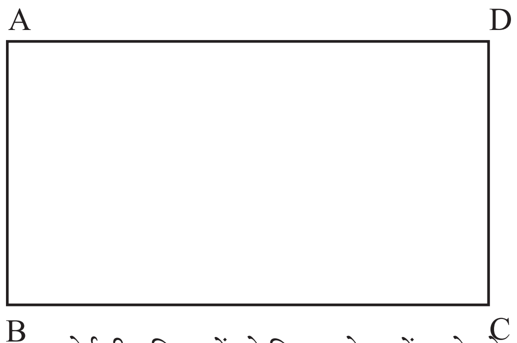


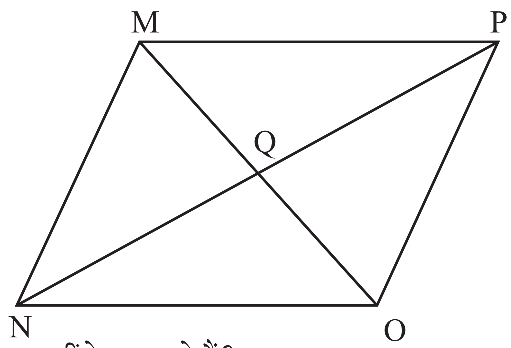
रेखाखण्ड के दोनों अन्त्य बिन्दु निश्चित होते हैं। यदि इन बिन्दुओं के नाम X तथा Y हों तो रेखाखण्ड का नाम XY अथवा YX होता है। किरण का एक अन्त्य बिन्दु निश्चित होता है। किरण UV का बिन्दु U निश्चित है।

क्रियाकलाप-

1. निम्नांकित प्रत्येक चित्र में रेखाखण्डों की संख्या गिनकर लिखने तथा उनके नाम बताने को कहें।

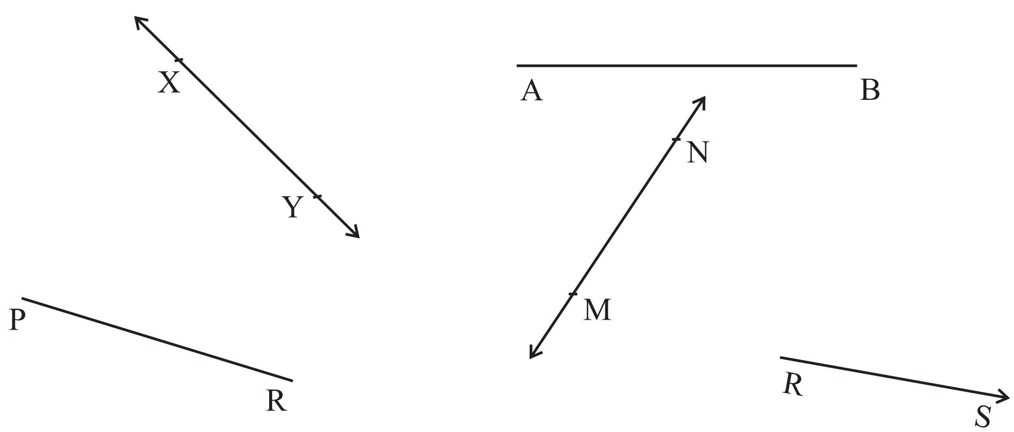






2. कोई तीन बिन्दुओं जो कि एक रेखा में न हो को लेने पर उनसे कितने रेखाखण्ड खींचे जा सकते हैं?

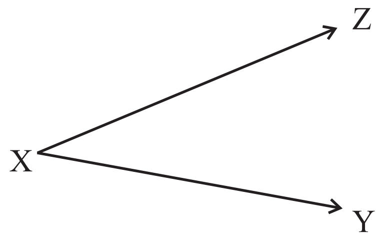
3. निम्नांकित में रेखा तथा रेखाखण्ड तथा किरण की पहचान कीजिए तथा इनके नाम बताइये-



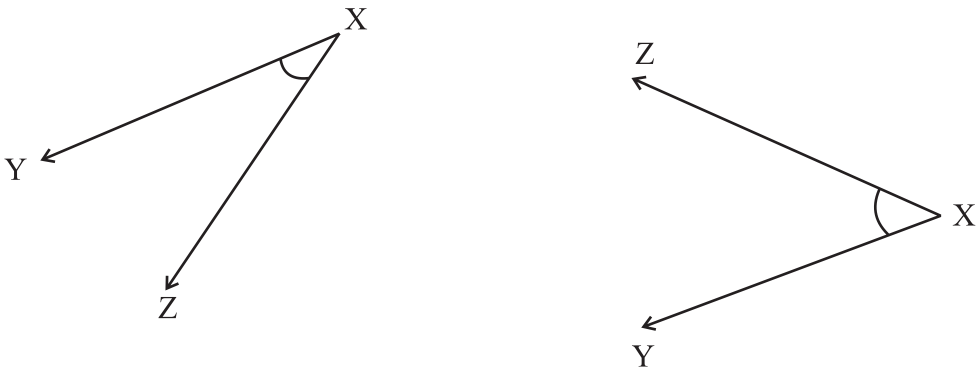
कोण तथा किरण-

(1) प्रशिक्षुओं को डिवाइडर, घड़ी एवं कैंची की सहायता से कोण बनने की संकल्पना स्पष्ट करें।
इसी प्रकार अन्य वस्तुओं का प्रयोग करते हुए कोण की संकल्पना स्पष्ट करें।

(2) प्रशिक्षुओं को कोई बिन्दु X लेकर उससे निकलने वाली दो किरणें XY और XZ खिंचवायें।



उपर्युक्त प्रकार से प्रशिक्षुओं से दो अन्य चित्रों को खींचने को कहें तथा यह समझाएँ कि-



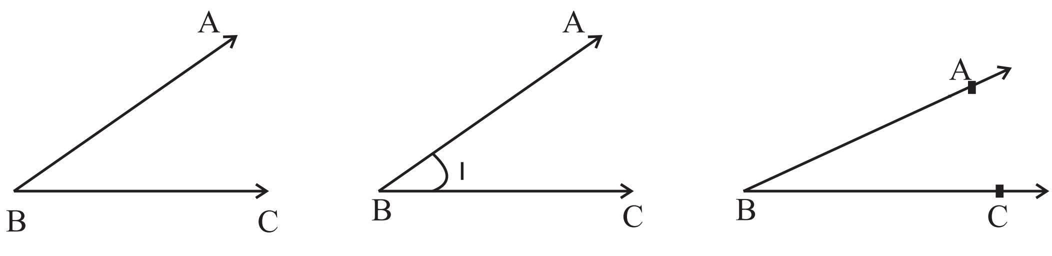
एक ही बिन्दु से निकलने वाली दो किरणों के मध्य एक कोण बनता है।

दोनों किरणों का उभयनिष्ठ बिन्दु निगमन कोण का शीर्ष कहलाता है। तथा दोनों किरणें कोण की भुजायें कहलाती हैं।

उपर्युक्त चित्र में बने कोण का शीर्ष X तथा भुजायें XY और XZ हैं।

इस कोण का नाम $\angle ZXY$ कोण लिखने में प्रयुक्त चिह्न ($\angle$) कोण का चिह्न है।

कोण का नाम लिखने में निम्नलिखित तीन विधियाँ प्रचलित हैं।

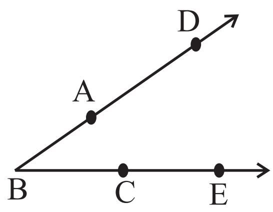


(i) $\angle ABC$

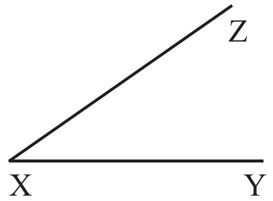
(ii) $\angle 1$

(iii) $\angle B$

प्रशिक्षुओं से निम्नांकित कोण का नाम विभिन्न प्रकार से लिखवायें।



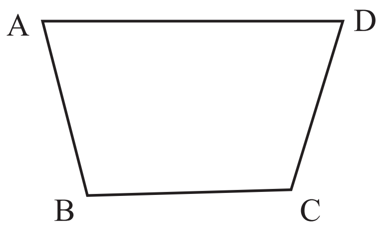
जब ऐसे दो रेखा खण्ड मिलते हैं जिनका अंत्य बिन्दु उभयनिष्ठ हो, जैसे-



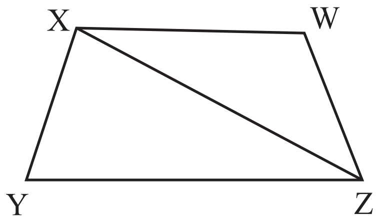
रेखाखण्डों XZ और रेखाखण्ड XY से एक कोण निर्धारित होता है, जिसका नाम $\angle ZXY$ है।

मूल्यांकन-

1. निम्नांकित चित्र में कोणों की संख्या तथा उनके नाम लिखिए।



2. निम्नांकित चित्र में कोण की संख्या तथा उनके नाम लिखिए। इनमें से किन-किन कोणों के नाम केवल शीर्ष द्वारा व्यक्त नहीं कर सकते हैं?



3. समतल वस्तुओं एवं वक्रतल वाली वस्तुओं के चार उदाहरण दीजिए।
4. सेब के तल पर विचार-विमर्श कीजिए।

क्रियाकलाप-

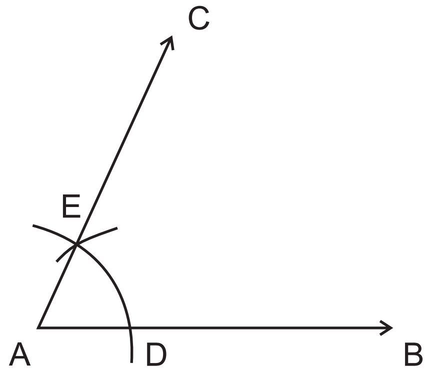
शिक्षक प्रशिक्षुओं से निम्नांकित माडल बनवाकर गणित किट बनाने के लिये कहें-

1. लोहे या अन्य धातु से विभिन्न प्रकार के कोण, विभिन्न आकृतियों के त्रिभुज, विभिन्न आकृतियों के चतुर्भुज, विभिन्न आकार के वर्ग, आयत, समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज तथा समलम्ब एवं वृत्त।
2. लकड़ी, गत्ते या चार्ट पेपर या ग्रीटिंग कार्ड इत्यादि से घन, घनाभ, शंकु, पिरामिड, वृत्ताकार चकती तथा गेंद।

इकाई - 11

पटरी तथा परकार की सहायता से 60°, 90°, तथा 120° के कोणों की रचना

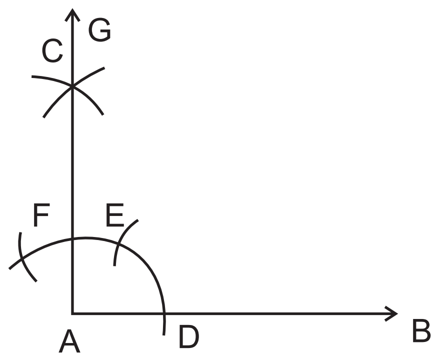
(1) 60° के कोण की रचना



रचना विधि-

सर्वप्रथम $\overrightarrow{AB}$ (AB) किरण खींची। A बिन्दु को केन्द्र मानकर किसी भी माप का एक चाप परकार की सहायता से खीचा जो AB को D पर काटता है। पुनः D को केन्द्र मानकर उसी माप से दूसरा चाप लगाते हैं, जो पहले चाप को E पर काटता है। AE को मिलाते हुए किरण $\overrightarrow{AC}$ (AC) खींची। इस प्रकार $\angle CAB=60^0$ प्राप्त हुआ।

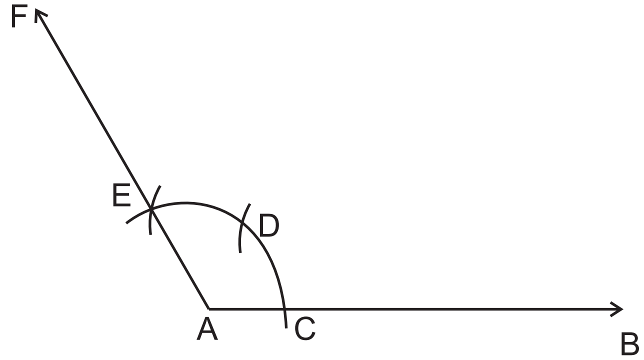
(2) 90° के कोण की रचना :



रचना विधि-

सर्वप्रथम रेखा AB खींची। रेखा कि बिन्दु A बिन्दु को केन्द्र मानकर किसी माप का एक चाप लगाया जो AB को बिन्दु D बिन्दु पर काटता है। पुनः D को केन्द्र मानकर उसी माप के चाप द्वारा एक अन्य चाप लगाया जो कि पूर्व चाप को बिन्दु E पर काटता है। बिन्दु E को केन्द्र मानकर उसी माप के चाप द्वारा एक चाप लगाया जो लगाये गये चाप को बिन्दु F बिन्दु पर काटता है। तत्पश्चात परकार में EF से अधिक की माप लेकर E तथा F को क्रमशः केन्द्र मानकर दो चाप लगाते हैं। जो बिन्दु C पर एक दूसरे को काटते हैं। AC को मिलाते हुए $\overrightarrow{AG}$ खींची। इस प्रकार $\angle GAB=90^0$ प्राप्त हुआ।

(3) 120^0 के कोण की रचना



रचना विधि–

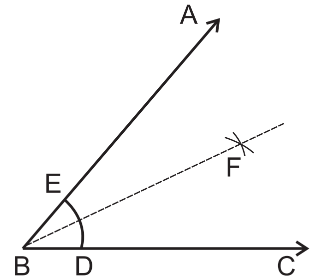
सर्वप्रथम $\overrightarrow{AB}$ खींचकर A बिन्दु को केन्द्र मानकर किसी माप का एक चाप लगाया जो AB को C बिन्दु पर काटता है। पुनः C को केन्द्र मानकर उसी माप के चाप से पूर्व चाप पर चाप लगाया। जो कि पूर्व चाप को D बिन्दु पर काटता है। अब D को केन्द्र मानकर उसी माप का चाप पुनः पूर्व चाप DC पर लगाया जो उसे E बिन्दु पर काटता है। AE को मिलाते हुए $\overrightarrow{AF}$ खींचते हैं।

इस प्रकार $\angle FAB=120^0$ प्राप्त हुआ।

इसे भी जानें-

प्रशिक्षु कोणों की रचना से भली-भाँति परिचित हो चुके है। क्या आपने कभी सोचा कि कोणों का अर्धक किस प्रकार किया जायेगा। आइये अब कोणों के अर्धक के बारे में चर्चा करेंगे।

किसी भी नाप का कोई कोण $\angle ABC$ खींचिए। बिन्दु B को केन्द्र मानकर किसी भी माप का एक चाप लगाया जो रेखा BC व BA को क्रमशः बिन्दु D तथा E पर काटता है। पुनः D और E बिन्दु को केन्द्र मानकर DE चाप से अधिक माप का चाप लेकर दो अन्य चाप लगायें जो एक दूसरे को बिन्दु F पर काटते है। बिन्दु F को बिन्दु B से मिलाने वाली रेखा $\angle ABC$ को समद्विभाजित करती है।



अतः $\angle FBC = \angle ABF = 1/2 \angle ABC$

मूल्यांकन-

1. 5 सेमी. की रेखा खींचकर 60^0 के कोण बनाइए।
2. 6 सेमी की एक रेखा खींचकर 90^0 एवं 120^0 के कोण बनाइए।
3. 6.5 सेमी की रेखा खींचकर 30^0 के कोण की रचना कीजिए।
4. 7.0 सेमी की रेखा पर 45^0 के कोण की रचना कीजिए।
5. $22\frac{1}{2}^0$ कोण की रचना कीजिए।
6. 150^0 का कोण बनाइए।
7. 75^0 का कोण बनाइए।

इकाई - 12

कोण के प्रकार (न्यूनकोण, समकोण और अधिककोण)

इस इकाई को पढ़ने के बाद निम्नलिखित की जानकारी होगी-

(1) कोण का ज्ञान

(2) कोण की माप

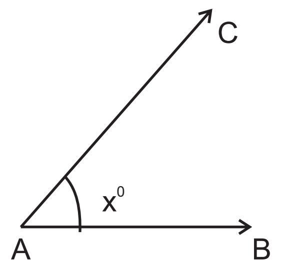
(3) कोण के प्रकार

कोण-

आप जानते हैं किसी भी आकृति की संरचना रेखा एवं कोण के बिना संभव नहीं है। दो असमांतर रेखाएँ परस्पर कहीं न कहीं मिलती हैं। इनके मिलन बिन्दु पर दोनों रेखाओं के बीच झुकाव होता है। इस झुकाव को दोनों रेखाओं के बीच का कोण कहते हैं।

पार्श्व चित्र में किरण AB व किरण AC बिन्दु A पर मिलती है। इन दोनों किरणों के मध्य जो झुकाव है, वही परस्पर एक किरण के सापेक्ष दूसरी किरण पर कोण कहलाता है।

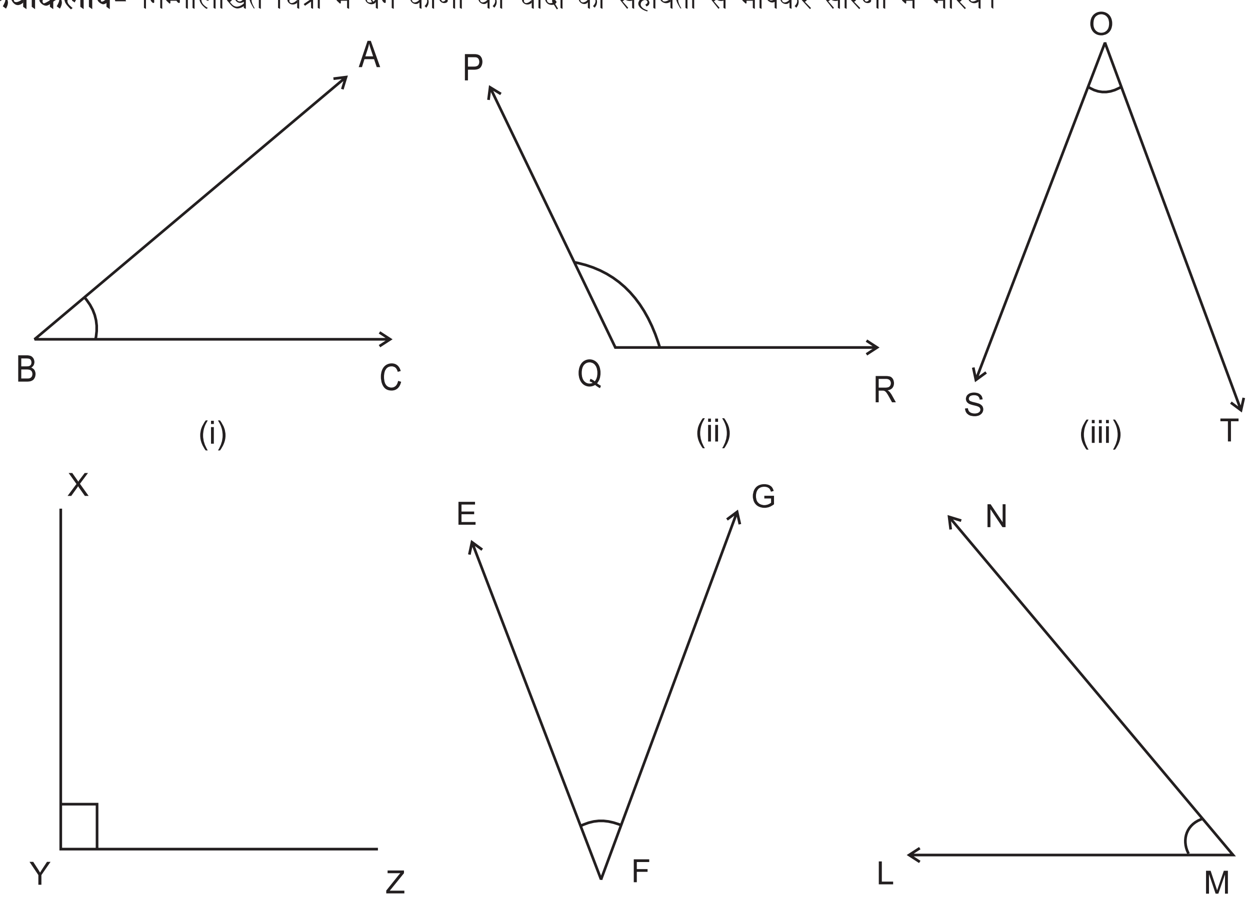
इस प्रकार दोनों किरणों के बीच बना कोण $\angle CAB$ है।



कोण का मापना-

कोण के मापने की इकाई अंश ($^\circ$) होती है। यदि उपरोक्त चित्र में हम यह मान लें कि दोनों किरणों के बीच का कोण x अंश है तो इसे "x°" द्वारा व्यक्त करते हैं। कोण के मापने का मापक चाँदा कहलाता है।

क्रियाकलाप- निम्नलिखित चित्रों मे बने कोणों को चाँदा की सहायता से मापकर सारणी में भरिये।

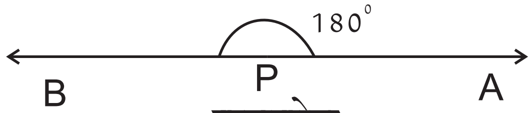


क्र0सं0	कोणों के नाम	कोणों की माप
1.	$\angle$ ABX	....
2.	$\angle$ PQR	....
3.	$\angle$ TOS	....
4.	$\angle$ XYZ	....
5.	$\angle$ EFG	....
6.	$\angle$ LMN	....

कोणों के प्रकार-

• ऋजुकोण (Straight Angle)-

एक ही रेखा पर दो किरण परस्पर विपरीत दिशा में लीजिए। इस प्रकार रेखा पर दो विपरीत किरणों के द्वारा बनाये गये कोण को ऋजुकोण (Straight Angle) कहते हैं। ऋजुकोण 180° का होता है। यहाँ पर $\angle$ BPA की माप 180° है।



ऋजुकोण

• सम्पूर्ण कोण (Complete Angle)-

यदि कोई किरण अपने प्रारंभिक बिन्दु के प्रति एक बार पूरा घुमाने के बाद अपनी प्रारंभिक स्थिति में संपाती हो जाय तो इस प्रकार बने कोण को सम्पूर्ण कोण (Complete Angle) कहते हैं। इसकी माप 360° होता है।

सम्पूर्णकोण

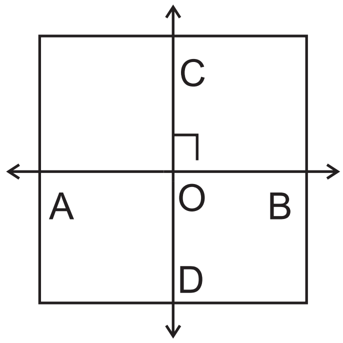
• शून्य कोण (Zero Angle)-

यदि किरण को घुमाए बिना इनकी प्रारंभिक और अंतिम स्थितियाँ संपाती हो, तो इस प्रकार बने कोण को शून्य कोण (Zero Angle) कहते हैं। शून्य कोण की माप 0° होती है।

शून्यकोण

• समकोण (Right Angle)-

आयताकार कागज पर चित्रानुसार एक रेखा AB लीजिए। इसे AB के अनुगत मोड़ दीजिए। पुनः इस कागज को इस प्रकार मोड़िए कि रेखा AB का एक भाग दूसरे भाग पर आ जाये कागज के दूसरे मोड़ को CD से दर्शाइए। आप देखते हैं कि कागज के मोड़ों का उभयनिष्ठ बिन्दु O है। अब बिन्दु O पर चार कोण $\angle$COB, $\angle$AOC, $\angle$DOA तथा $\angle$BOD बनते हैं। ये चारों कोण परस्पर बराबर हैं। इनमें से प्रत्येक कोण को समकोण कहते हैं। समकोण कोण का माप 90° होता है। इसे ∟ चिन्ह द्वारा निरूपित

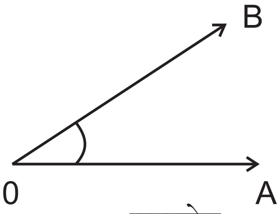


करते हैं।

• न्यूनकोण (Acute Angle)-

वह कोण जो शून्य कोण से बड़ा तथा समकोण से छोटा होता है, न्यूनकोण (Acute Angle) कहलाता है। अर्थात्

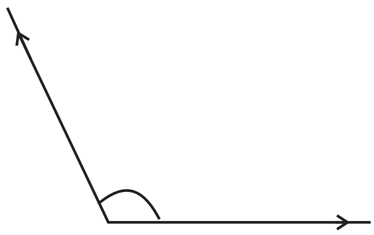
$0^\circ <$ न्यूनकोण $< 90^\circ$



न्यूनकोण

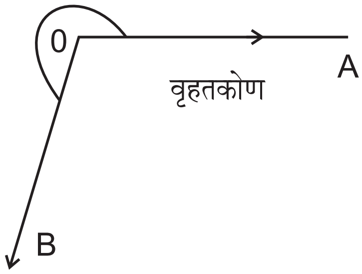
• अधिककोण (Obtuse Angle)-

वह कोण एक समकोण से बड़ा किन्तु एक ऋजु कोण से छोटा होता है, जो अधिककोण (Obtuse Angle) कहलाता है। अर्थात् $180^\circ >$ अधिककोण $> 90^\circ$


अधिककोण

• वृहत् कोण (Reflex Angle)-

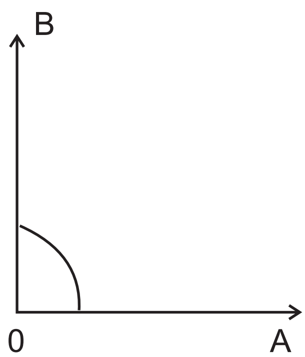
वह कोण जो ऋजुकोण से बड़ा किन्तु एक सम्पूर्ण कोण से छोटा होता है, वृहत कोण (Reflex Angle) कहलाता है। अर्थात् $180^\circ <$ वृहतकोण $> 360^\circ$



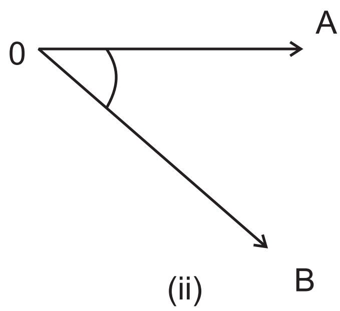
मूल्यांकन-

1. 260° का कोण किस प्रकार का कोण है?
2. निम्नांकित कोणों में न्यूनकोण, अधिककोण और वृहत्कोण छाँटकर अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए-

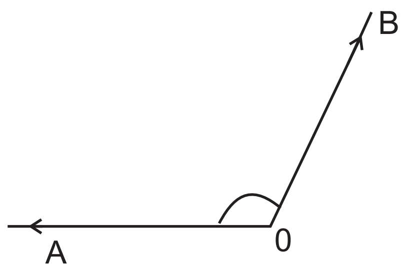
   210°, 147°, 10°, 300°, 54°, 178°, 91°, 222°, 150°, 89°,
3. निम्नांकित आकृतियों को देखिए और कोण के प्रकार लिखिए।



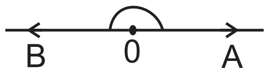
(i)



(ii)

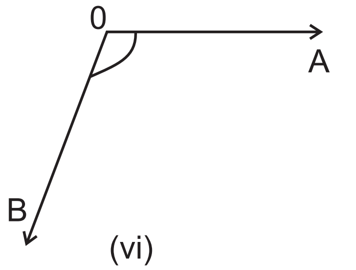


(iii)

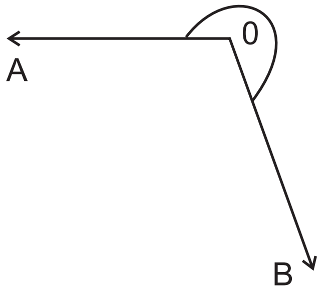


(iv)

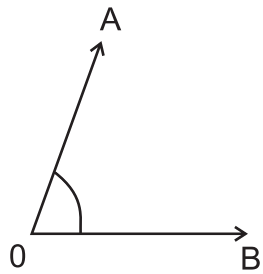
(v)



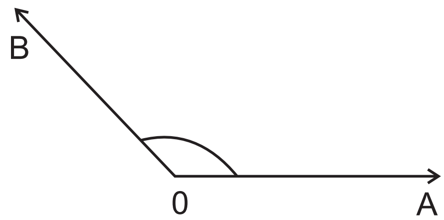
(vi)



(vii)



(viii)



(ix)

4. एक साइकिल के पहिए में 36 तीलियाँ हों, तो आसन्न तीलियों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

इकाई - 13

• त्रिभुज, आयत, वर्ग तथा वृत्त की अवधारणा तथा इनके अंगों की जानकारी

इस इकाई में त्रिभुज, आयत, वर्ग एवं वृत्त की संकल्पना का बोध कराया जायेगा।

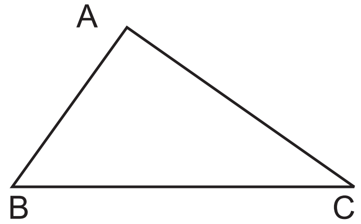
त्रिभुज- त्रिभुज के अन्तर्गत हम निम्नांकित बिन्दुओं का अध्ययन करेंगे।

- त्रिभुज की संकल्पना
- त्रिभुज के निर्माण के लिए तीन असंरेख बिन्दुओं की आवश्यकता
- त्रिभुज के अंगों का ज्ञान
- त्रिभुज के अंतः क्षेत्र एवं बाह्य क्षेत्र का ज्ञान
- त्रिभुज और त्रिभुजीय पटल में अन्तर
- त्रिभुज के अन्तः कोणों का योग
- त्रिभुज के प्रकार
- त्रिभुज की विशेषतायें
- त्रिभुज के शीर्ष लम्ब; माध्यिकाएँ; भुजाओं के लम्बार्द्धक तथा कोणों के अर्धक के संगामी होने का सम्बोध
- लम्ब केन्द्र, केन्द्रक, परिकेन्द्र

त्रिभुज की पहचान कराने के लिए श्यामपट पर विभिन्न आकृतियाँ जैसे असमान भुजाओं से निर्मित पंचभुज, चतुर्भुज, त्रिभुज इत्यादि बनाएँ। अब इन आकृतियों से त्रिभुज की आकृति की पहचान कराएँ। शिक्षक श्याम पट पर तीन बिन्दुओं को अंकित कर बतायें कि जब तीन बिन्दु असंरेख होते हैं तभी त्रिभुज की आकृति सम्भव है।

इस प्रकार तीन असंरेख बिन्दुओं A, B तथा C को आपस में मिलाने पर चित्रानुसार जो आकृति प्राप्त होती है उसे त्रिभुज ABC कहते हैं। प्राप्त त्रिभुज में तीन रेखाखंड AB,BC और CA है अतः Δ ABC, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ तथा $\overline{CA}$ से निर्मित होता है।

त्रिभुज = त्रि + भुज इसका अर्थ है तीन भुजाओं वाली आकृति।



अतः स्पष्ट होता है कि-

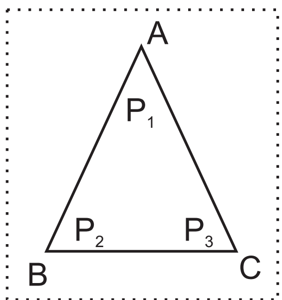
किसी समतल में स्थिति तीन असंरेख बिन्दुओं को मिलाने पर बनी आकृति को त्रिभुज कहते हैं।

तीन रेखाखंड जिनसे त्रिभुज बना है त्रिभुज की भुजायें कहलाती हैं।

संकेत Δ एक त्रिभुज को निरुपित करने के लिए प्रयुक्त होता है।

इस प्रकार Δ ABC के तीन बिन्दुओं A, B और C को त्रिभुज के शीर्ष कहते हैं। $\angle$ ABC, $\angle$ CAB और $\angle$ BCA त्रिभुज के तीन अन्तःकोण हैं।

इस प्रकार तीन भुजाएँ और तीन कोण मिलकर त्रिभुज के छः भाग या अवयव कहलाते हैं।

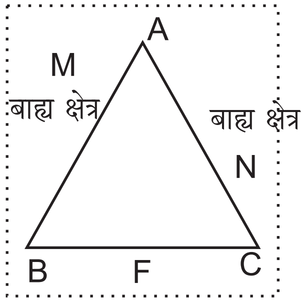


ध्यान दीजिए-

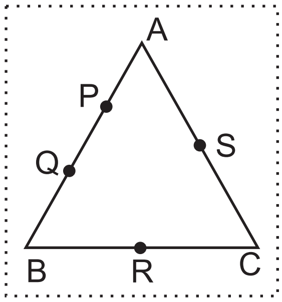
त्रिभुजीय आकार को घेरने वाली तीन भुजायें और तीन शीर्ष ही त्रिभुज हैं। त्रिभुज से घिरा हुआ तल त्रिभुज नहीं है।

अतः किसी तल पर बना त्रिभुज तल को तीन भागों में बाँटता है।

त्रिभुज में तल के उस भाग को जिसमें P_1, P_2, P_3, जैसे बिन्दु हैं। त्रिभुज के अन्तःक्षेत्र कहते हैं।



तल का वह भाग जो त्रिभुज से घिरा हुआ नहीं है जिसमें M,N,F जैसे बिन्दु हैं उसे त्रिभुज का बाह्य क्षेत्र या बहिर्भाग कहते हैं।



त्रिभुज में तल के उस भाग को जिसमें P,Q,R,S जैसे अनगिनत बिन्दु स्थित हैं त्रिभुज कहते हैं।

त्रिभुज का अन्तःक्षेत्र और त्रिभुज मिलकर त्रिभुजाकार क्षेत्र कहलाता है।

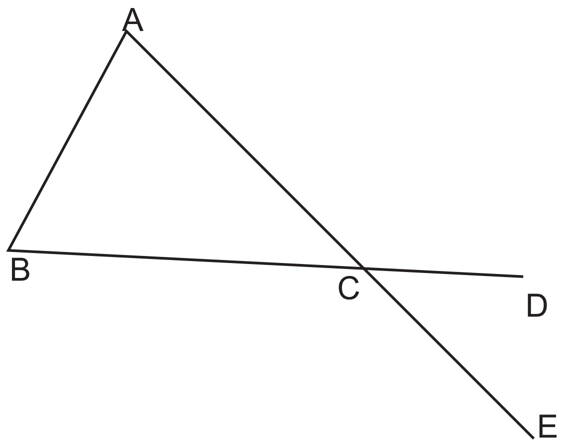
त्रिभुजः त्रिभुजीय आकार को घेरने वाली तीन भुजाएँ और तीन शीर्ष ही त्रिभुज हैं

त्रिभुजीय पटल-

त्रिभुज और त्रिभुजाकार क्षेत्र मिलकर त्रिभुजीय पटल कहलाता है।

त्रिभुज का बाह्य कोण-

किसी त्रिभुज ABC की एक भुजा BC को बढ़ाने पर, बने हुए कोण $\angle$ ACD को त्रिभुज का बाह्य कोण कहते हैं। $\angle$ ACD के सापेक्ष $\angle$ ACB आसन्न अंतःकोण है तथा शेष दो कोण $\angle$ A तथा $\angle$ B ($\angle$ CAB तथा $\angle$ ABC) $\angle$ ACD के सापेक्ष अंतः अभिमुख कोण कहलाते हैं।



इसी प्रकार AC भुजा को बढ़ाने पर बने बाह्य $\angle$ BCE के सापेक्ष भी $\angle$ ACB आसन्न कोण एवं $\angle$ A तथा $\angle$ B अंतः अभिमुख कोण कहलाते हैं। किसी भी त्रिभुज का बाह्य कोण उसके अंतः अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता हैः

$$\angle ACD = \angle BCE = \angle A + \angle B$$

ध्यान दीजिए-

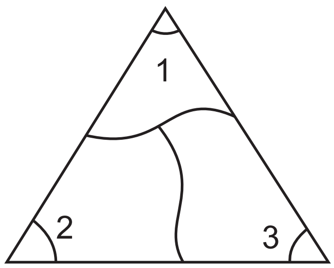
$\angle$ DCE, Δ ABC का बहिष्कोण नहीं है।

त्रिभुज के अन्तः कोणों का योग-

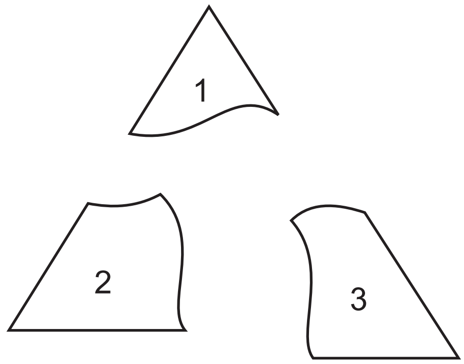
क्रिया कलापः-

एक मोटे कागज जैसे पुराना ग्रीटिंग कार्ड, निमन्त्रण कार्ड इत्यादि लेकर एक त्रिभुज की आकृति चित्र (।) की तरह बनाइए। इसको कोणों को $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ से नामांकित कीजिये। इन कोणों को चित्र (ii) की भाँति काट कर अलग कीजिए। अब एक रेखा PQR कर तीनों कटे हुए भागों को चित्र (iii) के अनुसार रखते हैं कि सभी शीर्ष Q पर हों तथा न तो एक दूसरे को ढँके और न ही

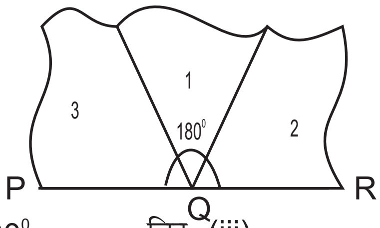
उनके बीच कोई स्थान रिक्त हो। इस प्रकार तीनों कोण मिलकर एक ऋजु कोण PQR बनाते हैं जो कि 180° का है।



चित्र (i)



चित्र (ii)

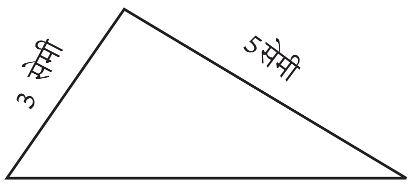


$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

चित्र (iii)

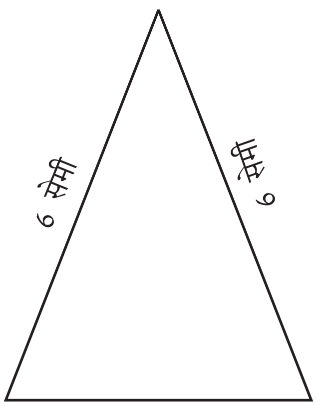
त्रिभुजों के प्रकार-

(क) भुजाओं के दृष्टिकोण से त्रिभुजों के तीनों प्रकार चित्र बनाकर समझाइए।



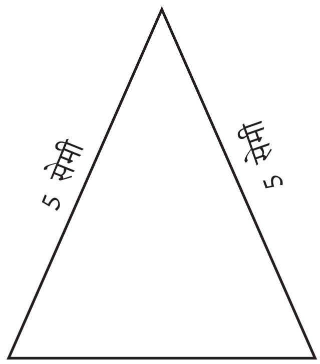
6सेमी

विषम बाहु त्रिभुज



4 सेमी

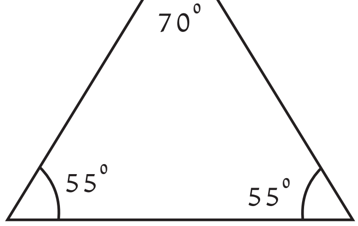
समद्विबाहु त्रिभुज



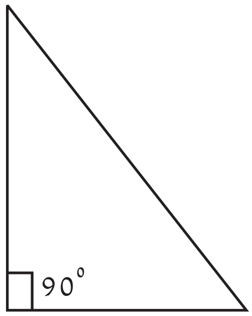
5 सेमी

समबाहु त्रिभुज

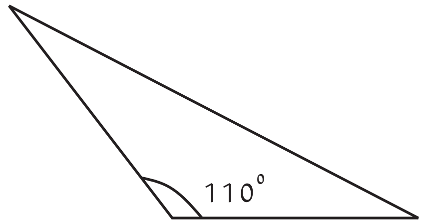
(ख) कोणों के दृष्टिकोण से त्रिभुजों के तीनों प्रकार चित्र बनाकर समझाइए।



न्यूनकोण त्रिभुज



समकोण त्रिभुज



अधिक कोण त्रिभुज

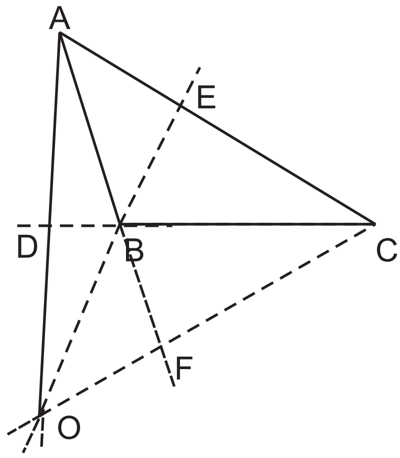
त्रिभुज की विशेषतायें-

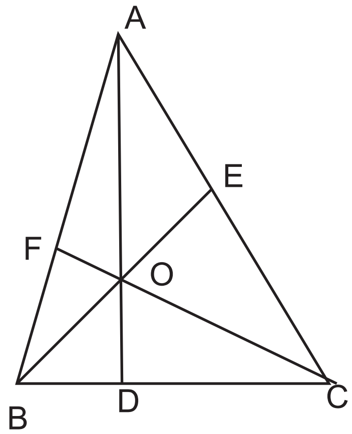
1. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर न हो, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण छोटी भुजा के सामने के कोण से बड़ा होता है।
2. यदि किसी त्रिभुज के दो कोण असमान हो, तो बड़े कोण के सामने की भुजा छोटे कोण के सामने की भुजा से बड़ी होती है।
3. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योगफल सदैव तीसरी भुजा से बड़ा होता है।
4. समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।
5. त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समान्तर और लम्बाई में उसका आधा होता है।
6. त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से एक अन्य भुजा के समान्तर खींची गयी रेखा, तीसरी भुजा को उसके मध्य बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती है।

उपर्युक्त विशेषताओं की पुष्टि शिक्षार्थियों द्वारा क्रिया कलाप द्वारा कराया जाये।

लम्ब केन्द्र -

Δ ABC के शीर्ष A से सम्मुख भुजा BC पर लम्ब AD, शीर्ष B से सम्मुख भुजा AC पर लम्ब BE तथा शीर्ष C से सम्मुख भुजा AB पर लम्ब CF खींचिए ये तीनों लम्ब (AD, BE तथा CF) O बिन्दु पर मिलते हैं। बिन्दु 'O' त्रिभुज का **लम्ब केन्द्र** कहलाता है।





इसी प्रकार त्रिभुज के **केन्द्रक** (माध्यिकाओं का संगमन बिन्दु), **अन्तःकेन्द्र** (कोणों के अर्धकों का संगमन बिन्दु) तथा **परिकेन्द्र** (भुजाओं के लम्बार्धकों का संगमन बिन्दु) को ज्ञात कराइऐ।

क्रिया कलाप :

चार्ट पेपर पर शिक्षार्थियों से विभिन्न आकृतियों (न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, अधिककोण त्रिभुज) के त्रिभुज बनवायें। त्रिभुज के भुजाओं के लम्बार्धक तथा त्रिभुज के लम्बशीर्ष एवं माध्यिकायें खिचवायें। इस प्रकार परिकेन्द्र तथा लम्ब केन्द्र एवं केन्द्रक को चिन्हित करवाकर, तीनों से होती हुई रेखा खंड खिचवायें एवं आयलर लाइन का ज्ञान करायें।

शिक्षार्थियों को दिखायें कि त्रिभुज का परिकेन्द्र, केन्द्रक तथा लम्ब केन्द्र एक ही रेखा खंड पर स्थित है। गणितज्ञ आयलर के नाम पर इसे आयलर लाइन (Euler line) कहते हैं।

यदि परिकेन्द्र बिन्दु 'P' केन्द्रक बिन्दु 'G' तथा लम्ब केन्द्र Q है तो शिक्षार्थियों से PG और GQ रेखाखंड की माप कराएँ। इस प्रकार GQ = 2PG परिणाम प्राप्त होता है।

ध्यान दें-

यदि त्रिभुज समबाहु होता है तो परिकेन्द्र, केन्द्रक तथा लम्ब केन्द्र एक ही बिन्दु होते हैं। अर्थात् तीनों बिन्दु संपाती होंगे। अतः समबाहु त्रिभुज में आयलर लाइन की माप शून्य होगी।

मूल्यांकन-

1. शिक्षार्थियों द्वारा विभिन्न मापों के त्रिभुज बनवाकर उनसे निम्नांकित क्रियायें करायें-

(1) त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों की माप

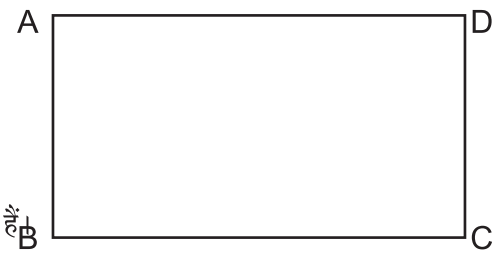
(2) त्रिभुज के बहिष्कोण की माप एवं इस कोण के अन्तः अभिमुख दोनों कोणों की माप करवाकर सिद्ध करायें कि त्रिभुज का बहिष्कोण अपने अन्तः अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।

2. अन्तः केन्द्र, केन्द्रक, परिकेन्द्र एवं लम्ब केन्द्र का ज्ञान।

3. त्रिभुज की समस्त विशेषताओं का सत्यापन शिक्षार्थी क्रिया कलाप द्वारा करें।

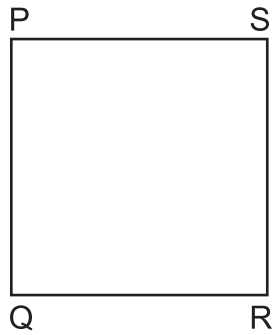
आयत-

माचिस की डिब्बी रखकर उसके किनारों से सटाकर पेंसिल चलाइए। बिन्दु A से आरंभ करके पुनः बिन्दु A पर पहुँचते हैं। इससे एक बंद आकृति बनती है। रेखाखंडों से बनी यह बंद आकृति आयत है। रेखाखंड AB, BC, CD व DA आयत की भुजाएँ हैं। बड़ी भुजा आयत की लम्बाई एवं छोटी भुजा आयत की चौड़ाई है।



आयत की विशेषतायें-

1. आयत का प्रत्येक अंतःकोण समकोण होता है।
2. आयत की आमने सामने की भुजायें आपस में बराबर एवं समांतर होती हैं।
3. आयत के आमने सामने के शीर्षों को मिलाने वाली रेखाएँ विकर्ण कहलाती हैं।
4. आयत के विकर्ण बराबर होते हैं एवं एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।



वर्ग-

वह आयत जिसकी चारों भुजायें बराबर हों वर्ग कहलाता है।

वर्ग की विशेषतायें-

वर्ग की समस्त विशेषतायें आयत के समान होती है एवं साथ ही वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं एवं एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

क्रियाकलाप-

शिक्षार्थियों से विभिन्न मापों के आयत एवं वर्ग बनवाकर उनके अन्तःकोणों की माप आमने, सामने की भुजाओं की माप, विकर्णों इत्यादि की माप करवाकर उनकी विशेषताओं का सत्यापन करवायें।

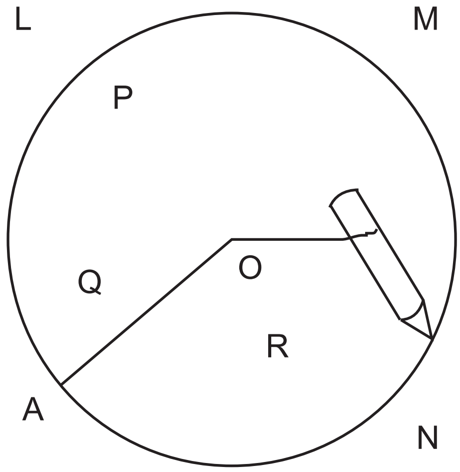
वृत्त-

वृत्त के अन्तर्गत हम निम्नांकित बिन्दुओं को सीखेंगे-

- वृत्त की संकल्पना
- वृत्त के अंगों का ज्ञान
- बाह्य तथा अन्तः क्षेत्र
- छेदिका

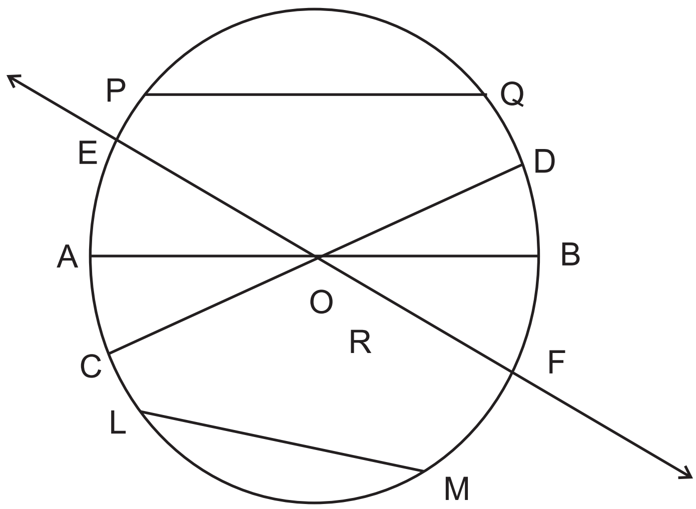
क्रिया कलाप : 1- शिक्षक ड्राइंग बोर्ड पर पिन की सहायता से कागज, शिक्षार्थी से लगवाकर कागज पर एक बोर्ड पिन लगवायें। अब एक धागे (मोटा सूत) के एक सिरे को बोर्ड पिन से बाँधकर दूसरे सिरे को पेंसिल से बांधकर पेंसिलकी नोक बोर्ड पिन के

चारों ओर घुमवायें। इस प्रकार जो आकृति प्राप्त होती है उसे वृत्त कहते हैं। तथा वृत्त के अन्दर जहाँ धागा बंधी पिन गड़ी है वह वृत्त का केन्द्र है। (बिन्दु O) वृत्त के किसी बिन्दु से केन्द्र की दूरी (जैसे OA) वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। बिन्दु P, Q एवं R वृत्त के अन्तःक्षेत्र में स्थित हैं यह वृत्त का अंतःक्षेत्र कहलाता है। बिन्दु L,M एवं N वृत्त के बाह्य क्षेत्र में स्थित है। वृत्त एवं वृत्त का अन्तःक्षेत्र मिलाकर वृत्तीय पटल कहलाता है।



क्रिया कलाप : अध्यापक शिक्षार्थियों को परकार से अवगत कराते हुए उसकी सहायता से अनेक लम्बाई वाले वृत्तों को खींचने का पर्याप्त अभ्यास करवायें।

चित्रानुसार केन्द्र O से होकर एक रेखा शिक्षार्थियों से खींचने को कहें। शिक्षक बतायें कि वृत्त के केन्द्र से होकर जाने वाली रेखा वृत्त को दो बिन्दुओं पर काटती है। माना यह रेखा वृत्त को E तथा F बिन्दु पर काटती है। इस रेखा खण्ड ($\overline{EF}$) को वृत्त का व्यास कहते हैं। इसके अतिरिक्त वृत्त के दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को वृत्त की जीवा कहते हैं। अतः **वृत्त का व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है।** एक वृत्त के अन्तर्गत अनेक व्यास एवं जीवाएं खींची जा सकती हैं जैसा कि चित्र से स्पष्ट है। रेखाखंड AB, EF तथा CD ($\overline{AB}$, $\overline{EF}$ तथा $\overline{CD}$) वृत्त के व्यास हैं तथा रेखा खंड PQ तथा LM ($\overline{PQ}$ तथा $\overline{LM}$) वृत्त की जीवाएँ हैं।



शिक्षक प्रशिक्षुओं को निर्देशित करें-

1. लोहे की तीलियों अथवा लकड़ी की तीलियों से विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों जैसे समबाहु त्रिभुज तथा विषमबाहु त्रिभुजों के मॉडल बनये एवं त्रिभुजों की विशेषताओं की पुष्टि करें।
2. विभिन्न आकार के आयत एवं वर्ग की आकृतियाँ लोहे की तीलियाँ अथवा लकड़ी की तीलियों इत्यादि से मॉडल का निर्माण करें

एवं आयत और वर्ग की विशेषताओं की पुष्टि करें।

3. विभिन्न आकार की गोल चूड़ियाँ लेकर चूड़ी की परिधि के भिन्न-भिन्न किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरियों की माप करें एवं व्यास और जीवा की लम्बाइयों की तुलना करके निष्कर्ष निकालें।

मूल्यांकन-

1. 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचकर छात्र व्यास और किन्हीं दो जीवाओं की नाप लिखें तथा त्रिज्या और व्यास में सम्बन्ध स्थापित करें।
2. शिक्षार्थी 6 सेमी लम्बाई एवं 4 सेमी चौड़ाई के एक आयत की रचना करें एवं उसके विकर्णों को नापकर सम्बन्ध स्थापित करें।
3. 5.5 सेमी नाप से एक वर्ग की रचना करें एवं उसके विकर्णों के मध्य बने कोणों को मापें।

इकाई - 14
परिमिति

इस इकाई कोपढ़ने के बाद निम्नलिखित की जानकारी होगी-

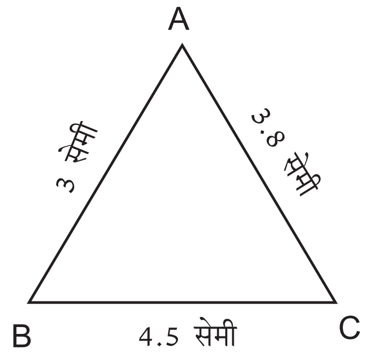
एक ही तल में स्थित विभिन्न प्रकार की बन्द आकृतियों की परिमिति का ज्ञान

शिक्षार्थियों को त्रिभुज, आयत, वर्ग एवं वृत्त का ज्ञान है। किसी समतलीय आकृति की बाह्य सीमा की माप उसकी परिमिति (परिमाप) कहलाती है। सम्मुख चित्र में ABC एक त्रिभुज है। जिसकी भुजा AB= 3 सेमी, भुजा BC = 4.5 सेमी तथा CA= 3.8 सेमी है।

अतः त्रिभुज का परिमाप = (3 + 3.8 + 4.5) सेमी

= 11.3 सेमी

,

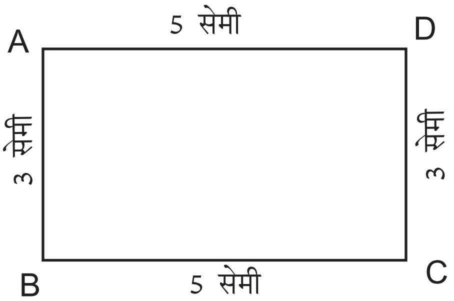


संलग्न आयत ABCD का परिमाप = (2 × 3 + 2 × 5) सेमी

= 2(3 + 5) सेमी

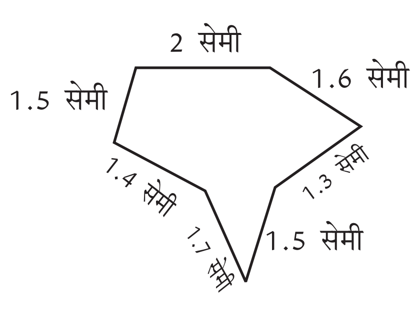
= 2 × 8 सेमी

= 16 सेमी



आयत का परिमाप = 2 [लम्बाई + चौड़ाई]
वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा की माप

एक 11 सेमी लम्बा तार लेकर उसको कई स्थानों पर मोड़कर चित्रानुसार विभिन्न आकृतियाँ शिक्षार्थियों से बनवायें।



इस आकृति का परिमाप ज्ञात करने को कहा जाये।

परिमाप = (1.5+1.4+1.7+1.5+1.3+1.6+2.0) सेमी

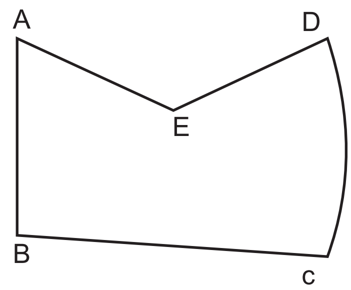
= 11 सेमी

किसी भी तार से शिक्षार्थी त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त इत्यादि विभिन्न बन्द आकृतियाँ बनाकर उसका परिमाप ज्ञात करने पर पायेंगें कि वह तार की लम्बाई के बराबर होता है।

वृत्त को बनाने में आवश्यक तार की लम्बाई उस वृत्त की परिधि कहलाती है।

मूल्यांकन-

1. 6 सेमी लम्बे तथा 4 सेमी चौड़े आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए।
2. 5 सेमी भुजा के वर्ग का परिमाप ज्ञात कीजिए।
3. दी गई ABCDEA आकृति का परिमाप 14.28 सेमी है जिसमें AB = 3.5 सेमी, BC = 3.8 सेमी, DE = 2.3 सेमी, EA = 2.05 सेमी वक्र CD की मापज्ञात कीजिये।



4. किसी बहुभुज की समस्त भुजायें समान हो तो उसे समबहुभुज कहते हैं। एक समषटभुज की एक भुजा की माप 2.32 सेमी है। समषटभुज का परिमाप क्या होगा ?
5. एक आयताकार पार्क के चारों ओर पार्क के अन्दर एक सड़क का निर्माण किया गया है तथा शेष भाग में घास लगायी गई। यदि सड़क की चौड़ाई 5 फीट 7 इंच हो और पार्क की लम्बाई 65 फीट 10 इंच तथा चौड़ाई 40 फीट 9 इंच है तो घास वाले पार्क का परिमाप ज्ञात कीजिए। क्या सड़क का परिमाप और घास वाले पार्क का परिमाप एक समान हैं ?