शिक्षा का अधिकार
सर्व शिक्षा अभियान
सब पढ़ें सब बढ़ें

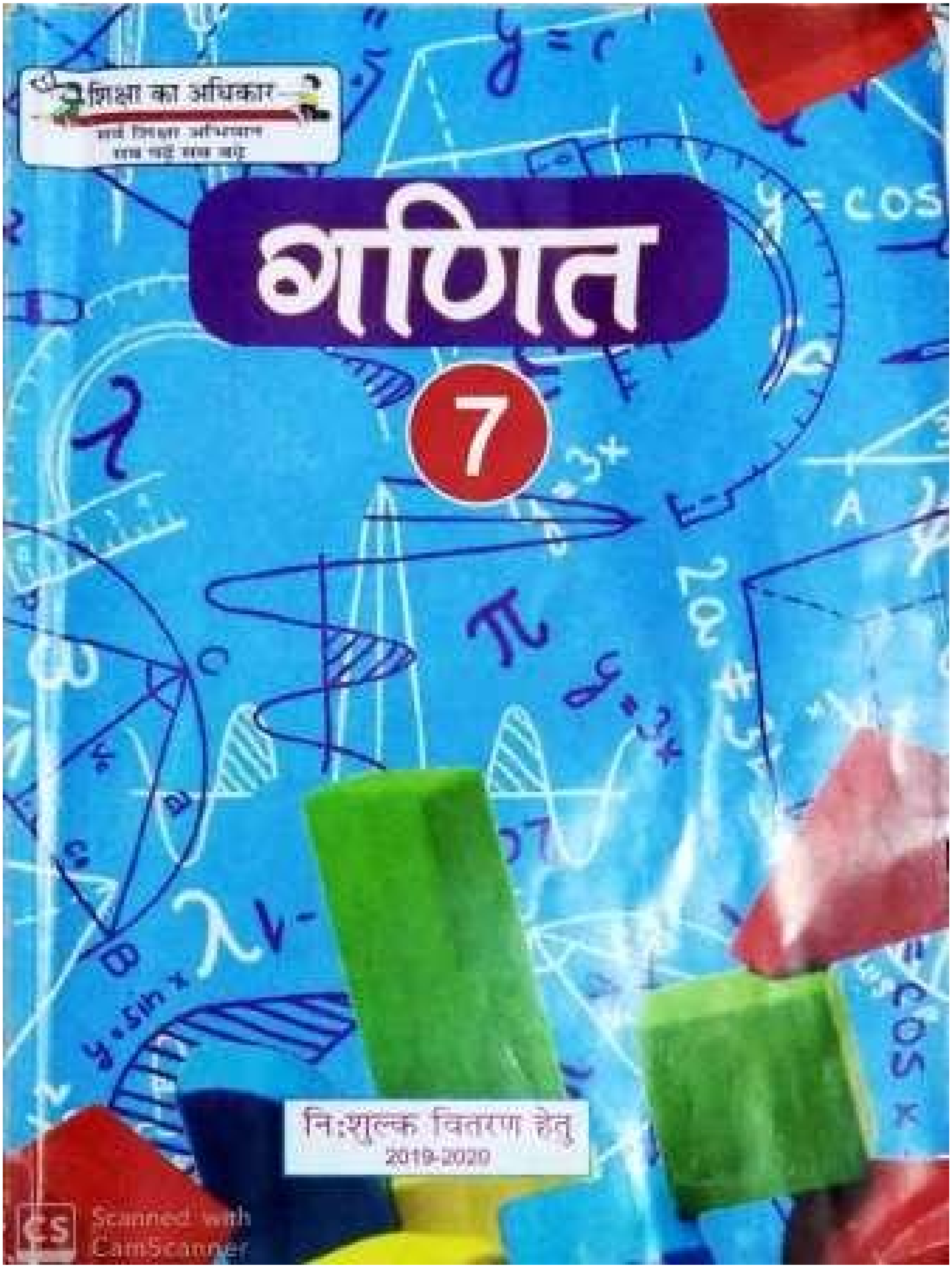
गणित

7

इकाई –1 परिमेय संख्याएं

नि:शुल्क वितरण हेतु
2019-2020

Scanned with CamScanner


शिक्षा का अधिकार
गणित
7
निःशुल्क वितरण हेतु
2019-2020
Scanned with CamScanner

गणित कक्षा:7

E-BOOKS DEVELOPED BY

1. Dr.Sanjay Sinha Director SCERT,U.P,Lucknow
2. Ajay Kumar Singh J.D.SSA,SCERT,Lucknow
3. Alpa Nigam (H.T) Primary Model School, Tilauli Sardarnagar,Gorakhpur
4. Amit Sharma (A.T) U.P.S, Mahatwani ,Nawabganj, Unnao
5. Anita Vishwakarma (A.T) Primary School ,Saidpur,Pilibhit
6. Anubhav Yadav (A.T) P.S.Gulariya,Hilauli,Unnao
7. Anupam Choudhary (A.T) P.S,Naurangabad,Sahaswan,Budaun
8. Ashutosh Anand Awasthi (A.T) U.P.S,Miyanganj,Barabanki
9. Deepak Kushwaha (A.T) U.P.S,Gazaffarnagar,Hasanganz,unnao
10. Firoz Khan (A.T) P.S,Chidawak,Gulaothi,Bulandshahr
11. Gaurav Singh (A.T) U.P.S,Fatehpur Mathia,Haswa,Fatehpur
12. Hritik Verma (A.T) P.S.Sangramkheda,Hilauli,Unnao
13. Maneesh Pratap Singh (A.T) P.S.Premnagar,Fatehpur
14. Nitin Kumar Pandey (A.T) P.S, Madhyanagar, Gilaula , Shravasti
15. Pranesh Bhushan Mishra (A.T) U.P.S,Patha,Mahroni Lalitpur
16. Prashant Chaudhary (A.T) P.S.Rawana,Jalilpur,Bijnor
17. Rajeev Kumar Sahu (A.T) U.P.S.Saraigokul, Dhanpatganz ,Sultanpur
18. Shashi Kumar (A.T) P.S.Lachchhikheda,Akohari, Hilauli,Unnao
19. Shivali Gupta (A.T) U.P.S,Dhaulri,Jani,Meerut
20. Varunesh Mishra (A.T) P.S.Madanpur Paniyar,Lambhua,Sultanpur

इकाई : 1 परिमेय संख्याएँ

AQJC6K

- **परिमेय संख्याओं की अवधारणा**
- **दो क्रमागत पूर्णांकों के मध्य में परिमेय संख्या**
- **समतुल्य परिमेय संख्याएँ**
- **परिमेय संख्याओं का क्रम**

1.1 भूमिका

आपने आस-पास की वस्तुओं को गिनने से प्रारम्भ कर संख्याओं को सीखा है। गिनने में प्रयोग की गयी संख्याओं को गणन संख्याएँ या प्राकृतिक संख्याएँ (Natural Numbers) नाम दिया गया। आप जानते हैं कि 1,2,3,4,5, ...प्राकृतिक संख्याएँ है। शून्य की खोज होने पर प्राकृतिकसंख्याओं में शून्य को सम्मिलित करने पर हमें पूर्ण संख्याएँ 0,1,2,3,4,5,..... प्राप्त हुई। इसके बाद प्राकृतिक संख्याओं के संगत ऋणात्मक पूर्णांक(---3,-2,-1) को भी पूर्ण संख्याओं में सम्मिलित कर लिया गया और इस प्रकार संख्या पद्धति को पूर्णांकों तक विस्तृत कर लिया गया।

पिछली कक्षाओं से आप भिन्नोसे भी परिचित हैं। आप इन भिन्नोपर योग, घटाना, गुणन और विभाजन का अध्ययन कर चुके हैं। इस इकाई में हम परिमेय संख्याओं की अवधारणा प्राप्त करेंगं।

1.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

आप पढ़ चुके हैं कि विपरीत स्थितियों को व्यक्त करने के लिए पूर्णांकों का उपयोग किया जा सकता है। इसी प्रकार कई स्थितियों में भिन्नात्मक संख्याओं को भी प्रयोग में लाया जाता है। विपरीत स्थितियों में भिन्नात्मक संख्याओं के भी ऋणात्मक मान लेने कीआवश्यकता होती है।

उदाहरण के लिए -

समुद्र तल से किसी स्थान की ऊचाई 600 मी को हम $\frac{3}{5}$ किमी द्वारा व्यक्त कर सकते हैं। क्या समुद्र तल से 600 मी की गहराई को $\frac{3}{5}$ किमी गहराई में व्यक्त कर सकते हैं?
समुद्र तल से नीचे $\frac{3}{5}$ किमी को $-\frac{3}{5}$ किमी के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।आप समझ सकते हैं कि $-\frac{3}{5}$ पूर्णांक संख्या नहीं है और यह भिन्न भी नहीं है। अत:ऐसी संख्याओं को सम्मिलित करने के लिए संख्या पद्धति को विस्तारित करने कीआवश्यकता हुई, आइए अब हम परिमेय संख्याओं को विस्तार से जाने।

ध्यान दीजिए :

यदि a तथा b दो पूर्णांक हैं और $b \neq 0$, तो पर विचार कीजिए और निम्नांकित सारणी-1 देखिए

a ÷ b	a ÷ b = c	भागफल c पूर्णांक है अथवा नहीं
-15 ÷ 5	-3	पूर्णांक है।
-12 ÷ 2	-6	पूर्णांक है।
0 ÷ 5	0	पूर्णांक है।
12 ÷ 5	$\frac{12}{5}$	पूर्णांक नहीं, यह एक भिन्न है।
-12 ÷ 7	?	न तो पूर्णांक है और न भिन्न है।
13 ÷ (-3)	?	न तो पूर्णांक है और न भिन्न है।

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि $-\frac{12}{5}$ और $\frac{13}{-3}$ न तो पूर्णांक हैं और न भिन्न हैं।ध्यान दें, भिन्न ऋणत्मक नहीं होती हैं।निम्नांकित सारणी - 2 में उल्लिखित कथन को देखिए और तर्क द्वारा सत्यापित कीजिए।

सारणी - 2

संख्या	पूर्णांक है अथवा नहीं
-3	पूर्णांक है।
+6	पूर्णांक है।
0	पूर्णांक है।
$\frac{12}{5}$	पूर्णांक नहीं, परन्तु भिन्न है।
$\frac{11}{7}$	पूर्णांक नहीं, परन्तु भिन्न है।
$\frac{1}{-3}$	न तो पूर्णांक है, और न भिन्न है।
$\frac{-13}{6}$	न तो पूर्णांक है, और न भिन्न है।

उपर्युक्त सारणी में उल्लिखित गणितीय कथनों को समीकरण के रूप में निम्नांकित ढंग से भी दिखा सकते हैं :

गुणनफल	X का [illegible]
$4 \times X = -12$	$X = -3$
$(-3) \times X = -18$	$X = +6$
$(-5) \times X = 0$	$X = 0$
$5 \times X = 12$	$X = \frac{12}{5}$
$7 \times X = 11$	$X = \frac{11}{7}$
$(-3) \times X = 1$	$X = -?$
$6 \times X = -13$	$X = -?$

(i) $4x = -12,$

$x = \frac{-12}{4} = -3$, x एक पूर्णांक है।

(ii) $-3x = -18$

$3x = 18$

$x = \frac{18}{3} = 6$

x का मान 6 है

x पूर्णांक है।

(iii) $-5x = 0$

$x = \frac{0}{-5} = 0$, x पूर्णांक है।

(iv) $5x = 12,$

$x = \frac{12}{5}$

x पूर्णांक नहीं, अपितु भिन्न है।

(v) $7x = 11$

$x = \frac{11}{7}$, x पूर्णांक नहीं, अपितु एक भिन्न है।

(vi) $-3x = 1$

$x = ?$, x न तो पूर्णांक है और न भिन्न है।

(vii) $6x = -13$

$x = ?$, x न तो पूर्णांक है और न भिन्न है।

उपर्युक्त परिस्थितियों में हम देखते हैं कि अनेक प्रश्नों में भागफल पूर्णांक नहीं हैं और भिन्न भी नहीं। इसी आवश्यकता की पूर्ति के लिये संख्या पद्धति का विस्तार हुआ।

प्रयास कीजिए :

$4 \times \square = -16$

$(-3) \times \square = 0$

$7\times \square = 21$

$6 \times \square = -15$

$(-3) \times \square = -24$

$5 \times \square = 12$

$(-3)\times \square = -1$

परिमेय संख्याएँ क्या हैं ?

परिमेय (Rational) शब्द की उत्पत्ति अनुपात (Ratio) से हुई है। आप जानते हैं कि अनुपात 3:5 को $\frac{3}{5}$ भी लिखा जा सकता है। यहाँ 3 और 5 प्राकृतिकसंख्याएँ हैं तथा $\frac{3}{5}$ भिन्न है। परन्तु $\frac{-3}{5}$ को –3:5 में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

1. निम्नांकित संख्याओं पर विचार कीजिए।

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots$

$\frac{1}{1}$ के संगत $\frac{-1}{1}, \frac{1}{-1}$ और $\frac{-1}{-1}$ नई संख्याएँ हैं।

$\frac{1}{2}$ के संगत $\frac{-1}{2}, \frac{1}{-2}$ और $\frac{-1}{-2}$ नई संख्याएँ हैं।

$\frac{2}{3}$ के संगत $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}$ और $\frac{-2}{-3}$ नई संख्याएँ हैं।

इसी प्रकार 0 के संगत $\frac{0}{-1}$ और $\frac{0}{1}$ नई संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए :

- $\frac{3}{4}$ के संगत नई संख्याएँ लिखिए।
- $\frac{4}{5}$ और $\frac{5}{7}$ के संगत बनने वाली नई संख्याएँ लिखिए।

इस प्रकार कोई भी दो पूर्णांकों p और q (जहाँ $q \neq 0$) के अनुपात p: q को $\frac{p}{q}$ लिखा जा सकता है। परिमेय संख्याएँ इसी रूप में व्यक्त की जाती हैं।

परिभाषा

एक परिमेय संख्या को एक ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$

इस प्रकार $\frac{-2}{5}$ एक परिमेय संख्या है। यहाँ p==–2और q =5

भिन्नें और परिमेय संख्याएँ

विभिन्न भिन्नें यथा $\frac{7}{1}, \frac{4}{9}, \frac{5}{13}, \dots$ लिखिए।

प्रत्येक की $\frac{p}{q}$ से तुलना कीजिये।

$\frac{7}{1}$ में $p = 7$ और $q = 11$,

$\frac{4}{9}$ में $p = 4$ और$q = 9$,

भिन्नोके अन्य उदाहरण लेकर उनके रूप की $\frac{p}{q}$से तुलना करने पर हम पाते हैं कि प्रत्येक भिन्न का रूप $\frac{p}{q}$ जैसा है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि,सभी भिन्नें परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

पाँच परिमेय संख्याओं को लिखिए –

1. जिनके अंश ऋणात्मक पूर्णांक तथा हर धनात्मक पूर्णांक हों,
2. अंश धनात्मक और हर ऋणात्मक पूर्णांक हो,
3. अंश और हर दोनों ऋणात्मक पूर्णांक हों।

क्या पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ हैं ?

किसी भी पूर्णांक को एक परिमेय संख्या माना जा सकता है। उदाहरणार्थ पूर्णांक -5 एक परिमेय संख्या है, क्योंकि इसे हम $\frac{-5}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं। पूर्णांक 0 को भी $\frac{0}{3}$ या $\frac{0}{7}$ आदि लिखा जा सकता है

अत: 0 भी परिमेय संख्या है।

0 एक परिमेय संख्या है,

संख्या शून्य न तो धनात्मक परिमेय संख्या है, न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या।

परिमेय संख्या $\frac{-3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{-11}, \frac{5}{11}, \frac{-2}{-9}$ परध्यान दीजिए। इनमें कौन सी संख्याएँ भिन्न हैं ?

यदि इन परिमेय संख्याओं को $\frac{p}{q}$से तुलना करते हैं, तो

$\frac{-3}{7}$ में $p= -3$ तथा $q = 7$

$\frac{3}{7}$ में $p= 3$ तथा $q = 7$

$\frac{5}{-11}$ में $p= 5$ तथा $q = -11$

$\frac{5}{11}$ में $p=5$ तथा $q = 11$

$\frac{-2}{-9}$ में p= – 2 तथा q = –9

परिमेय संख्याओं $\frac{-3}{7}, \frac{5}{-11}, \frac{-2}{-9}$ में p तथा q दोनों धनात्मक पूर्णांक नहीं हैं, अत: ये संख्याएँ भिन्न नहीं हैं, जबकि $\frac{3}{7}$ और $\frac{5}{11}$ में p और q दोनों धनात्मक पूर्णांक हैं, ये भिन्न हैं।

प्रयास कीजिए :

क्या $\frac{-5}{-7}$ **एक परिमेय संख्या है ?**

क्या -8 एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है ?

ध्यान दीजिए :

आपने विभिन्न भिन्नों $\frac{7}{1}, \frac{4}{9}, \frac{5}{13}$ **के उदाहरण लेकर प्रत्येक के रूप की तुलना** $\frac{p}{q}$ **से करने पर देखा कि प्रत्येक भिन्न का रूप** $\frac{p}{q}$ **जैसा है, जहाँ** p **औरj** q **धन पूर्णांक हैं तथा** $q \neq 0$

निष्कर्ष :

परिमेय संख्याओं में पूर्णांक और भिन्न सम्मिलित होते हैं।

धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ के अंश और हर दोनों ही धनात्मक पूर्णांक हैं। ऐसी परिमेय संख्या को धनात्मक परिमेय संख्या कहते हैं। $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{2}{9}$ आदि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

$\frac{-5}{7}$ का अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि इसका हर एक धनात्मक पूर्णांक है। ऐसी संख्या को ऋणात्मक परिमेय संख्या कहते हैं। अत: $\frac{-3}{5}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ णात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

इसी प्रकार $\frac{3}{-7}, \frac{4}{-5}, \frac{7}{-9}$ आदि भी ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

यहाँ यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि जो संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं की जा सकती है अपरिमेय संख्या कहलाती है।

सभी परिमेय संख्याएँ भिन्न नहीं होती हैं, परन्तु प्रत्येक भिन्न परिमेय संख्या होती है।

ध्यान दीजिए :

परिमेय संख्या $\frac{-2}{-9}$ **भिन्न नहीं है। जबकि** $\frac{-2}{-9}$ **का दूसरा रूप** $\frac{2}{9}$ **भिन्न है।**

- **यदि** x **तथा** y **धन पूर्णांक हैं, तो परिमेय संख्याएँ** $\frac{x}{y}$ **तथा** $\frac{-x}{-y}$ **दोनों धनात्मक हैं तथा** $\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$

- परिमेय संख्याएँ $\frac{-x}{y}$ **और** $\frac{x}{-y}$ **दोनों ऋणात्मक हैं तथा** $\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$

पूर्णांक और परिमेय संख्याएँ

एक पूर्णांक को वि भिन्न पूर्णांकों के रूप में लिख सकते हैं :

यथा 11, –5, 0, 13, ...

देखिए : $11 = \frac{11}{1} = \frac{-22}{-2} = \frac{33}{3} = \frac{44}{4} = ...$

$11, \frac{11}{1}, \frac{-22}{-2}, \frac{33}{3}, \frac{44}{4}, ...$ के रूप में हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$

इसी प्रकार $-5 = \frac{-5}{1} = \frac{-10}{2} = \frac{+15}{-3} = \frac{-20}{4} = ...$

$-5, \frac{-5}{1}, \frac{-10}{2}, \frac{+15}{-3}, \frac{-20}{4}, ...$ भी $\frac{p}{q}$ के रूप में है जहाँ p और q पूर्णांक है ($q \neq 0$)

तथा $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{-3} = \frac{0}{4} = ...$

$0, \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{-3}, \frac{0}{4}, ...$ $0, \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{-3}, \frac{0}{4}, ...$ $\frac{p}{q}$ के रूप में हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$

प्रयास कीजिए :

- पूर्णाक 13 को विभिन्न रूपों में व्यक्त कीजिए।
- उपर्युक्त प्रकार से पूर्णांकों -7, 6 और -9 को1 हर वाली परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए।
- $\frac{-2}{3}$ को विभिन्न रूपों में लिखिए।

पूर्णांकों के उपर्युक्त वि भिन्न रूपों को $\frac{p}{q}$ से तुलना करने पर हम पाते हैं कि इन सभी रूपों में वे $\frac{p}{q}$ के समान हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$

उपर्युक्त से निष्कर्ष निकलता है कि :

यदि p एक पूर्णांक है, तो अत:

$$p = \frac{p}{1} = \frac{2p}{2} = \frac{3p}{3} = \frac{-p}{-1} = \frac{-2p}{-2} = \ldots\ldots$$

अत: सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ हैं।

परिमेय संख्याओं के दो महत्वपूर्ण प्रगुण

(1) समतुल्यता का प्रगुण

हम जानते हैं कि

$\frac{1}{2}$ के अंश तथा हर में क्रमश: 2, 3, 4 5, ..., से गुणा करने पर प्राप्त भिन्नें,

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \ldots$, समतुल्य भिन्नें हैं।

इसी प्रकार $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ आदि भिन्नोको समतुल्य भिन्नोमें व्यक्त कीजिए।

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \frac{24}{30}$ समतुल्य भिन्नें हैं।

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots$ समतुल्य भिन्नें हैं।

ङ्खीक इसी प्रकार किसी परिमेय संख्या के अंश तथा हर में एक ही पूर्णांक से गुणा करके समतुल्य परिमेय संख्याएँ प्राप्त होती हैं। इस प्रकार

$\frac{3}{-5} = \frac{6}{-10} = \frac{9}{-15} = \frac{12}{-20} = \frac{15}{-25}, \ldots$ समतुल्य परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए :

$$\frac{3}{5}=\frac{\square}{15}=\frac{12}{\square}=\frac{-15}{\square}$$

$$\frac{-5}{4}=\frac{\square}{16}=\frac{-25}{\square}=\frac{15}{\square}$$

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ के अंश तथा हर में किसी शून्येतर पूर्णांक से गुणा करने पर उसके समतुल्य एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है। हम जानते हैं कि पूर्णांकों की संख्या अनन्त है, अत: $\frac{1}{4}$ के समतुल्य अनन्त परिमेय संख्याएँ लिखी जा सकती हैं।

टिप्पणी : **किसी परिमेय संख्या के अंश तथा हर में पूर्णांक शून्य से गुणा करने पर उसके समतुल्य परिमेय संख्या नहीं प्राप्त होती है। जैसे $\frac{2}{3}$ के अंश तथा हर में 0 से गुणा करने पर $\frac{2\times0}{3\times0}=\frac{0}{0}$,प्राप्त होता है, जो परिमेय संख्या नहीं है, क्योंकि इसका हर 0 है।**

उपर्युक्त से निष्कर्ष निकलता है कि

यदि $\frac{x}{y}$ एक परिमेय संख्या है और m एक शून्येतर पूर्णांक है, तो $\frac{x}{y}=\frac{x\times m}{y\times m}$

प्रयास कीजिए :

- $\frac{5}{6}$ **और** $\frac{5}{-6}$ **के समतुल्य पाँच-पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।**

उदाहरण 1: $\frac{-7}{5}$ को ऐसी परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए, जिसका

(क) अंश -14 हो, (ख) हर 20 हो,

(ग) हर -30 हो, (घ) अंश 35हो।

हल : (क) का अंश -7 है। $\frac{-7}{5}$

-7 में 2 का गुणा करने पर गुणनफल = -14

$\frac{1}{5}$ के अंश तथा हर में 2 से गुणा करने पर प्राप्त परिमेय संख्या $=\frac{-7\times2}{5\times2}=\frac{-14}{10}$

इस प्रकार $\frac{-7}{5}=\frac{-14}{10}$

(ख) $\frac{-7}{5}$ का हर 5 है।

5 में 4 से गुणा करने पर गुणनफल 20 प्राप्त होता है।

इस प्रकार $\frac{-7}{5}$ के अंश तथा हर में 4 से गुणा करने पर $\frac{-7}{5}$ के समतुल्य परिमेय संख्या = $\frac{-7 \times 4}{5 \times 4} = \frac{-28}{20}$

उपर्युक्त की भाँति(ग) और (घ) खंडों को स्वयं हल कर सकते हैं।

2.सरलतम रूप का प्रगुण

हम $\frac{8}{12}, \frac{35}{40}, \frac{49}{63}$ आदि भिन्नोको इनके अंश तथा हर में इनके महत्तम समापवर्तक से भाग देकर सरल करना सीख चुके हैं। उदाहरणार्थ -

$\frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$

$\frac{35}{40} = \frac{35 \div 5}{40 \div 5} = \frac{7}{8}$

ठीक इसी प्रकार परिमेय संख्याओं के अंश तथा हर में उनके निरपेक्ष मानों के महत्तम समापवर्तक से भाग देकर उस परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्या प्राप्त की जा सकती है।जो सरलतम् रूप में होती है।

जैसे, $\frac{8}{-14} = \frac{8 \div 2}{(-14) \div 2} = \frac{4}{-7}$

तथा $\frac{-25}{40} = \frac{-25 \div 5}{40 \div 5} = \frac{-5}{8}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि

यदि $\frac{x}{y}$ परिमेय संख्या के अंश x तथा हर y का एक समापवर्तक m है, तो $\frac{x}{y} = \frac{x \div m}{y \div m}$, जो दी गयी परिमेय संख्या का सरल रूप है। जब स् म0स0 होता है, तब $\frac{x \div m}{y \div m}$ को सरल करने पर प्राप्त संख्या परिमेय संख्या $\frac{x}{y}$ का सरलतम रूप है।

परिमेय संख्या के सरलतम रूप में अंश और हर का म0स0 1 होता है अर्थात् अंश और हर सह-अभाज्य होते हैं।

दी गयी परिमेय संख्या का सरलतम रूप या मानक रूप

अमित को ज्ञात है कि $\frac{60}{72}$ एक परिमेय संख्या है। इसके अंश60 और हर 72 का महत्तम समापवर्तक 12 है।

अत: $\frac{60}{72} = \frac{60 \div 12}{72 \div 12} = \frac{5}{6}$

$\frac{5}{6}$ के अंश 5 और हर 6 का समापवर्तक 1 के अतिरिक्त अन्य संख्या नहीं है।

इस प्रकार अमित ने $\frac{20}{10}$ का सरलतम रूप $\frac{5}{6}$ प्राप्त किया।

प्रयास कीजिए :

$\frac{18}{45}$ को सरलतम रूप में लिखिए।

$\frac{80}{-112}$ परिमेय संख्या के अंश 80 और हर -112 के निरपेक्ष मानों का एक समापवर्तक 8 है।

अत: $\frac{80}{-112} = \frac{80 \div 8}{-112 \div 8} = \frac{10}{-14}$

$\frac{10}{-14}$ जो दी गयी परिमेय संख्या का एक सरल रूप है।

पुन: 10 और 14 का समापवर्तक 2 है,

अत: $\frac{10}{-14} = \frac{10 \div 2}{-14 \div 2}$

$= \frac{5}{-7} = \frac{-5}{7}$ (धनात्मक हर के लिए अंश तथा हर में (---) से गुणा किया गया है)

चूँकि 5 और 7 परस्पर सह-अभाज्य हैं, अत: $\frac{80}{-112}$ का सरलतम रूप $\frac{-5}{7}$ है।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित परिमेय संख्याओ को सरलतम रूप में लिखिए -

(क) $\frac{18}{45}$ (ख) $\frac{-18}{27}$ (ग) $\frac{-45}{36}$ (घ) $\frac{32}{-72}$

उपर्युक्त से निष्कर्ष निकलता है कि

- एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ **सरलतम रूप में तभी होती है जब q धनात्मक पूर्णांक हो, तथा ज् और q के निरपेक्ष मानों का महत्तम समापवर्तक 1 के अतिरिक्त अन्य कोई संख्या न हो।**
- **परिमेय संख्या का सरलतम रूप ही उसका मानक रूप है।**

अभ्यास 1 (a)

1. निम्नांकित पूर्णांकों को परिमेय संख्याओं के रूप में लिखिए, जिनका हर 1 हो –
–7, 11, 27, –45, 71

2. $\frac{-4}{5}$ को ऐसी परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए, जिसका अंश है –
(क) 8 **(ख)** -16 **(ग)** 20 **(घ)** -24

3. $\frac{-5}{-7}$ को ऐसी परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए, जिसका हर है –
(क) 7 (ख) -14 **(ग)** 21 **(घ)** -35

4. निम्नांकित परिमेय संख्या के हर को धनात्मक बनाइए :
(क) $\frac{-9}{-11}$ **(ख)** $\frac{11}{-17}$ **((ग)** $\frac{-4}{-19}$ **(घ)** $\frac{7}{-13}$

5. निम्नांकित परिमेय संख्या के अंश को धन पूर्णांक बनाइए :
(क) $\frac{-7}{13}$ (ख) $\frac{-11}{-19}$ **(ग)** $\frac{-18}{23}$ **(घ)** $\frac{-19}{-23}$

6. निम्नांकित संख्याओं में कौन सी परिमेय संख्याएँ धनात्मक हैं?
(क) $\frac{-9}{-13}$ **(ख)** $\frac{11}{-19}$ **(ग)** $\frac{-7}{-23}$ **(घ)** $\frac{8}{-13}$

7. निम्नांकित संख्याओं में कौन-कौन सी परिमेय संख्याएँ ऋणात्मक हैं?
(क) $\frac{-7}{11}$ **(ख)** $\frac{-6}{-13}$ **(ग)** $\frac{8}{-35}$ **(घ)** $\frac{-21}{-23}$

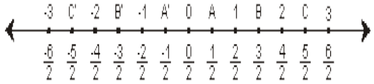
8. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को सरलतम रूप में लिखिए :
(क) $\frac{-9}{21}$ **(ख)** $\frac{-18}{-27}$ **(ग)** $\frac{21}{-36}$ **(घ)** $\frac{-36}{64}$

9. अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिख कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए :
(क) $\frac{-3}{4} = \frac{...}{-20} = \frac{...}{28}$ **(ख)** $\frac{-5}{-8} = \frac{...}{24} = \frac{25}{...}$
(ग) $\frac{7}{-9} = \frac{-14}{...} = \frac{35}{...}$ **(घ)** $\frac{-8}{...} = \frac{4}{15} = \frac{...}{-60}$

10. प्रत्येक के समतुल्य तीन और परिमेय संख्याएँ लिखिए :
(क) $\frac{2}{5}$ **(ख)** $\frac{7}{-11}$ **(ग)** $\frac{-8}{-5}$

1.3 दो क्रमागत पूर्णांकों के मध्य परिमेय संख्या ज्ञात करना

निम्नांकित चित्र में संख्या-रेखा पर पूर्णांक ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...निरूपित हैं।



उपर्युक्त संख्या-रेखा के दो क्रमागत पूर्णांकों के बीच की दूरी को दो समान भागों में विभक्त कीजिए। शून्य को निरूपित करने वाले बिन्दु o के दाहिनी ओर स्थित क्रमागत पूर्णांकों के मध्य बिन्दुओं कोA,B, C, ... द्वारा निरूपित कीजिए।

A, B, C, ... द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमश: $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},...$ हैं।

o से बायीं ओर स्थित क्रमागत पूर्णांकों के मध्य बिन्दुओं को A',B',C', ... द्वारा निरूपित कीजिए।

यहाँ, OA = OA'

OB = OB'

OC = OC'

... ...

... ...

इस प्रकार हम देखते हैं कि बिन्दु A, B, C, ... जितनी दूरी पर 0 से दाहिनी ओर हैं ङ्खीक उतनी ही दूरी पर क्रमश: बिन्दु A',B',C', .. O से बायीं ओर हैं। इस प्रकार बिन्दुओं A, B, C, ... के विपरीत क्रमश: बिन्दु A',B',C', ... हैं।

A',B',C', ... द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ बताइए।

A',B',C', ... द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमश: $\frac{-1}{2},\frac{-3}{2},\frac{-5}{2},...$ हैं।

हम जानते हैं कि :

$1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=...$, $2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=...$ तथा $3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=...$

इस प्रकार पूर्णांकों 1, 2, 3, ... के समतुल्य परिमेय संख्याएँ क्रमश: $\frac{2}{2},\frac{4}{2},\frac{6}{2},....$ हैं। अत: 1, 2, 3, ... के ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ पूर्णांकों क्रमश: -1, -2, -3, ... को $\frac{-2}{2},\frac{-4}{2},\frac{-6}{2},...$ के रूप में लिखते हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि उपर्युक्त संख्या-रेखा पर 0 से दाहिनी ओर अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमश: $\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{4}{2},\frac{5}{2},\frac{6}{2},...$ हैं।

निष्कर्ष :

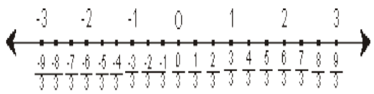
O से बायीं ओर स्थित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमश: $\frac{-1}{2},\frac{-2}{2},\frac{-3}{2},\frac{-4}{2},\frac{-5}{2},\frac{-6}{2},...$हैं।

स्पष्टत: परिमेय संख्याओंkesâ e $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \cdots$ fविपरीत क्रमश: $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{-6}{2}, \cdots$ हैं।0को $\frac{0}{2}$ के रूप में लिख सकते हैं।

इस प्रकार उपर्युक्त संख्या-रेखा के समस्त अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ बायें से दायें की ओर क्रमश: हैं :

$\cdots, \frac{-6}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \cdots$

इसी प्रकार निम्नांकित संख्या रेखा पर स्थित दो क्रमागत पूर्णांकों के बीच की दूरी को तीन बराबर भागों
में विभक्त कीजिए।



O से दाहिनी और अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमश: क्या हैं?

अभीष्ट परिमेय संख्याएँ क्रमश: हैं: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \cdots$

O से बायीं ओर अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित कौन-कौन परिमेय संख्याएँ हैं?

अभीष्ट परिमेय संख्याएँ क्रमश: हैं :

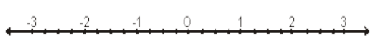
$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-6}{3} \cdots$

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त संख्या-रेखा के समस्त अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ हैं :

$\cdots, \frac{-6}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-3}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \cdots$

निम्नांकित संख्या-रेखा पर दो क्रमागत पूर्णांकों के बीच की दूरी को चार बराबर भागों में विभक्त कीजिए



संख्या-रेखा क्रमागत पूर्णांकों0 और 1 के बीच अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ बताइए।

इस प्रकार पूर्णांकों 0 और 1 सहित इनके बीच अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमश: हैं : $\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$

इसी प्रकार –1और 0 सहित इनके बीच अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमशः हैं :

$\frac{-4}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{0}{4}$

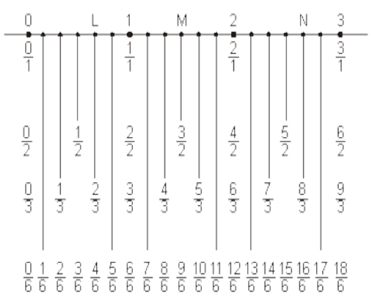
इन्हें कीजिए :

उपयुक्त संख्या-रेखा पर –3 से लेकर +3 तक के बीच के बिन्दुओं द्वारा निरूपित सभी संख्याओं को अपनी अभ्यास-पुस्तिका पर लिखिए।

उपर्युक्त प्रकार से संख्या-रेखा पर दो क्रमागत पूर्णांकों के बीच की दूरी को पाँच, छः, सात, ... समान भागों में विभक्त करने पर हमें नये नये बिन्दु मिलते हैं। इन नये बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ भी नयी अथवा अपने समतुल्य नये रूपों में मिलती हैं।

- **किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं के मध्य अनन्त बिन्दुओं द्वारा अनन्त परिमेय संख्याओं का प्रदर्शन**

निम्नलिखित संख्या-रेखा का चित्र देखिए



उपर्युक्त चित्र में संख्या रेखा पर 0, 1, 2, 3क्रमागत पूर्ण संख्याएँ निरूपित हैं। प्रत्येक दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं के मध्य की दूरी को छह समान भागों में विभक्त किया गया है। स्पष्ट है कि दो क्रमागत पूर्ण संख्याएँ, जैसे 1 और 2 के मध्य अनन्त बिन्दु हैं, जो अपने संगत अनन्त परिमेय संख्याओं को निरूपित करते हैं। चित्र से यह भी स्पष्ट है कि एक ही बिन्दु अनन्त समतुल्य परिमेय संख्याओं को भी निरूपित करता है। दो परिमेय संख्याएँ चाहे जितनी सन्निकट हों उनके बीच अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।

इन्हें कीजिए :

उपर्युक्त चित्र देखकर बताइए कि

(1) बिन्दुL किन किन समतुल्य परिमेय संख्याओं को निरूपित करता है।

(2) $\frac{8}{3}$ और $\frac{16}{6}$ समतुल्य परिमेय संख्याएँ संख्या-रेखा के किस बिन्दु द्वारा निरूपित होती हैं।

(3) समतुल्य परिमेय संख्याएँ $\frac{3}{1},\frac{6}{2},\frac{9}{3},\frac{18}{6},\dots$ किस पूर्ण संख्या के समतुल्य हैं।

(4) बिन्दु 0 द्वारा निरूपित अनन्त समतुल्य परिमेय संख्याएँ कौन-कौन हैं।

निष्कर्ष :

- संख्या-रेखा का एक ही बिन्दु अनन्त समतुल्य परिमेय संख्याओं को निरूपित करता है।
- दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।

दी गयी परिमेय संख्या, जो पूर्णांक नहीं है, का दो क्रमागत पूर्णांकों के मध्य संख्या-रेखा पर निरूपण

यदि दी गयी परिमेय संख्या है, तो $\frac{6}{5}$

$\frac{6}{5}=\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=1+\frac{1}{5}$

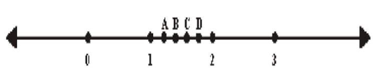
स्पष्टत $\frac{6}{5}>1$

पुन: $2=\frac{2}{1}=\frac{10}{5}$

अत $\frac{6}{5}<\frac{10}{5}$ अर्थात् $\frac{6}{5}<2$

इस प्रकार $1<\frac{6}{5}<2$, अत: $\frac{6}{5}$ क्रमागत पूर्णांकों 1 और 2 के बीच में पड़ती है।

$\frac{6}{5}$ को निम्नांकित संख्या-रेखा पर बिन्दु A द्वारा निरूपित किया गया है-



प्रयास कीजिए ::

(i) $\frac{8}{3}$ को संख्या रेखा पर दो क्रमागत पूर्णांकों के मध्य निरूपित कीजिए।

(ii) $\frac{-7}{3}$ को संख्या रेखा पर दो क्रमागत पूर्णांकों के मध्य निरूपित कीजिए।

1.4समान परिमेय संख्याएँ

हम देख चुके हैं कि एक ही परिमेय संख्या के समतुल्य अनन्त परिमेय संख्याएँ निरूपित की जा सकती हैं।

यदि दो परिमेय संख्याएँ दी गयीं हों, तो उनकी समानता (समतुल्यता) की जाँच कैसे करते हैं?

प्रथम विधि :सविता ने दी गयी परिमेय संख्याओं $\frac{-8}{12}$ और $\frac{30}{-45}$ को इनके सरलतम रूप (मानक रूप में) प्राप्त किया।

सविता जानती है किâ $\frac{-8}{12}$ के अंश और हर के निरपेक्ष मानों 8 और 12का म0स0 4 है,

अत: $\frac{-8}{12} = \frac{-8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{-2}{3}$

पुन: $\frac{30}{-45}$ के अंश तथा हर के निरपेक्ष मानों क्रमश: 30 और45 का म0स0 15 है।

अत: $\frac{30}{-45} = \frac{30 \div 15}{-45 \div 15} = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$

इस प्रकार सविता ने देखा कि $\frac{-8}{12}$ और $\frac{30}{-45}$ के सरलतम रूप समान हैं।

अत: $\frac{-8}{12} = \frac{30}{-45}$

उदाहरण 1 : $\frac{-16}{20}$ और $\frac{20}{-25}$ की समानता की जाँच कीजिए।

$\frac{-16}{20}$ के अंश तथा हर के निरपेक्ष मानों का म0स0 4 है।

अत: $\frac{-16}{20} = \frac{-16 \div 4}{20 \div 4} = \frac{-4}{5}$

पुन: $\frac{20}{-25}$ के अंश तथा हर के निरपेक्ष मानों का म0स05 है।

अत: $\frac{20}{-25} = \frac{20 \div 5}{-25 \div 5} = \frac{4}{-5} = \frac{-4}{5}$

इस प्रकार $\frac{-16}{20}$ और $\frac{20}{-25}$ दोनों परिमेय संख्याओं के सरलतम रूप $\frac{-4}{5}$ ही है ।

अत: $\frac{-16}{20} = \frac{20}{-25}$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि,

दो परिमेय संख्याओं की समानता की जाँच के लिए उन परिमेय संख्याओं के सरलतम रूप (मानक रूप) प्राप्त करते हैं। यदि उन दोनों के सरलतम रूप एक ही हैं, तो वे परिमेय संख्याएँ समान हैं, अन्यथा नहीं।

द्वितीय विधि : (समान हर बनाकर) : देखिए, $\frac{-8}{-14}$ और $\frac{12}{21}$ दो दी गयी परिमेय संख्याएँ हैं। अब इनके हरों को समान बनाते हैं।

$\frac{-8}{-14}$ का हर –14 ऋणात्मक, और $\frac{12}{21}$ का हर 21 धनात्मक हैं।

दोनों के हरों को धनात्मक बनाते हैं।

धनात्मक हर वाली इन परिमेय संख्याओं और $\frac{12}{21}$ के $\frac{8}{14}$ हरों 14 और 21का ल0स0 ज्ञात कीजिए।

14 और 21 का ल0स0= 42

$\frac{8}{14}$ के हर को 42 बनाने पर

$\frac{8}{14} = \frac{8 \times 3}{14 \times 3} = \frac{24}{42}$

इसी प्रकार $\frac{12}{21} = \frac{12 \times 2}{21 \times 2} = \frac{24}{42}$

अत: $\frac{-8}{-14} = \frac{12}{21}$

इसी प्रकार परिमेय संख्याओं के अन्य जोड़े यथा $\frac{-12}{15}$ और $\frac{36}{-45}$ लीजिए। इनके हरों के निरपेक्ष मानों15 और 45 के ल0स0 के बराबर दोनों के हर बनाइये। अब उनके अंशों की तुलना कीजिए।

$\frac{-12}{15} = \frac{(-12) \times 3}{15 \times 3} = \frac{-36}{45}$

तथा $\frac{36}{-45} = \frac{36 \times (-1)}{(-45) \times (-1)} = \frac{-36}{45}$

अत: $\frac{-12}{15} = \frac{36}{-45}$

प्रयास कीजिए :

(1) $\frac{8}{-18}$ और $\frac{-32}{72}$ की समानता की जांच कीजिए।

(2) क्या $\frac{-16}{20}$ और $\frac{24}{-30}$ समान हैं ?

दो परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ **और** $\frac{c}{d}$ **के समान होने का प्रतिबन्ध**

समान परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के जोड़े लीजिए, यथा (i) $\frac{a}{b} = \frac{3}{-4}$ तथा $\frac{c}{d} = \frac{-9}{12}$

(ii) $\frac{a}{b} = \frac{-5}{9}$ तथा $\frac{c}{d} = \frac{10}{-18}$ (iii) $\frac{a}{b} = \frac{-7}{-1}$ तथा $\frac{c}{d} = \frac{14}{22}$

उपर्युक्त परिमेय संख्याओं के जोड़ों को अग्रांकित सारणी में देखिए। प्रत्येक जोड़े के संगत a d तथा b mc प्राप्त कीजिए। इनके मानों की तुलना कीजिए। रिक्त स्थान भरिए।

समान परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$	$ad = a \times d$	$bc = b \times c$	ad और bc में सम्बन्ध
$\frac{3}{-4}, \frac{-9}{12}$	$3 \times 12 = 36$	$(-4) \times (-9) = 36$	समान है।
$\frac{-5}{9}, \frac{10}{-18}$	$(-5) \times (-18) = 90$	$9 \times 10 = 90$	समान है।
$\frac{-7}{-11}, \frac{14}{22}$	$(-7) \times 22 = -154$	$(-11) \times 14 = -154$	समान है।

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त की भाँति सारणी तैयार कीजिए।

$\frac{1}{2}, \frac{-4}{-8}$ … … …

$\frac{-5}{9}, \frac{15}{-27}$ --- … …

$\frac{3}{-4}, \frac{-12}{16}$ … … …

उपर्युक्त सारणी से निष्कर्ष निकलता है कि

यदि $\frac{a}{b}$ **और** $\frac{c}{d}$ **दो समान परिमेय संख्याएँ हैं, तो ad = bc**

इस प्रगुण का प्रयोग हम दो परिमेय संख्याओं की समानता की जाँच के लिए कर सकते हैं।

उदाहरण 2**:** $\frac{-15}{25}$ और $\frac{-12}{20}$ की समानता की जाँच कीजिए।

यदि दी गयी परिमेय संख्याओं में $\frac{-15}{25} = \frac{a}{b}$ और $\frac{-12}{20} = \frac{c}{d}$

तो $a = -15, b = 25, c = -12$ और $d = 20$

इस प्रकार $ad = -15 \times 20 = -300$

और$bc = 25 \times (-12) = -300$

इस प्रकार $ad = bc$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

अथवा $\frac{-15}{25} = \frac{-12}{20}$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित परिमेय संख्याओं के जोड़ों में कौन-कौन असमान हैं ?

(क) $\frac{-8}{24}$ और $\frac{7}{-21}$ **((ख))** $\frac{0}{-7}$ और $\frac{0}{4}$

(ग) $\frac{-6}{10}$ और $\frac{9}{-15}$ **(घ)** $\frac{-15}{20}$ और $\frac{25}{-30}$

अभ्यास 1(b)

1.निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को उनके सरलतम रूप में लिखिए :

(क) $\frac{-8}{10}$ ((ख)) $\frac{15}{20}$ (ग) $\frac{25}{45}$ (घ) $\frac{-14}{7}$

2. संकेतों = और ≠ में से चुन कर रिक्त स्थानों को भरिए :

(क) $\frac{-4}{5}$ ☐ $\frac{-5}{7}$ (ख) $\frac{-7}{11}$ ☐ $\frac{-7}{11}$

(ग) $\frac{-8}{5}$ ☐ $\frac{-7}{-4}$ (घ) $\frac{14}{-16}$ ☐ $\frac{-21}{16}$

3. निम्नांकित परिमेय संख्याओं के जोड़ों में कौन-कौन समान हैं?

(क) $\frac{-9}{12}$ और $\frac{8}{-12}$ **(ख)** $\frac{-15}{45}$ और $\frac{16}{-48}$

(ग) $\frac{-7}{21}$ और $\frac{3}{-9}$ **(घ)** $\frac{-8}{-14}$ और $\frac{13}{21}$

4. निम्नांकित परिमेय संख्या को संख्या-रेखा पर निरूपित कीजिए।

(क) $\frac{3}{4}$ **(ख)** $\frac{3}{5}$ **(ग)** $\frac{5}{8}$ **(घ)** $\frac{3}{16}$

5. निम्नांकित परिमेय संख्याओं के जोड़ों में कौन-कौन असमान हैं?

(क) $\frac{-8}{24}$ और $\frac{7}{-21}$ **(ख)** $\frac{-15}{20}$ और $\frac{25}{-30}$

(ग) $\frac{0}{-7}$ और $\frac{0}{4}$ **(घ)** $\frac{-6}{10}$ और $\frac{9}{-15}$

1.5 परिमेय संख्याओं का क्रमायोजन

पूर्णांकों तथा भिन्नोकी तरह परिमेय संख्याओं की भी तुलना की जा सकती है।

उदाहरण 1. परिमेय संख्याओं $\frac{-5}{4}$ और $\frac{7}{-9}$ में कौन बड़ी है?

हल : $\frac{7}{-9}$ को धनात्मक हर में व्यक्त करने पर प्राप्त होता है।

अब हम इनके हरों को समान करते हैं।

$$\frac{-5}{4} = \frac{(-5)\times 9}{4\times 9} = \frac{-45}{36}$$

इसी प्रकार : $\frac{-7}{9} = \frac{(-7)\times 4}{9\times 4} = \frac{-28}{36}$

चूँकि 45 > 28

अर्थात् – 45 < –28

अत: $\frac{-45}{36} < \frac{-28}{36}$

इस प्रकार $\frac{-28}{36} > \frac{-45}{36}$

$\therefore \frac{-7}{9} > \frac{-5}{4}$

उदाहरण 2: परिमेय संख्याओं $\frac{6}{-5}$ और $\frac{-7}{-6}$ में कौन बड़ी है ?

हल : परिमेय संख्याओं के हरों को धनात्मक बनाने पर,

$\frac{6}{-5} = \frac{6 \times (-1)}{(-5) \times (-1)} = \frac{-6}{5}$ और $\frac{-7}{-6} = \frac{(-7) \times (-1)}{(-6) \times (-1)} = \frac{7}{6}$

चूँकि $\frac{-6}{5}$ ऋणात्मक है और $\frac{7}{6}$ धनात्मक है और

धनात्मक संख्याएँ, ऋणात्मक संख्याओं से सदैव बड़ी होती हैं।

अत: $\frac{7}{6} > \frac{-6}{5}$

$\frac{-7}{9} > \frac{-5}{4}$

अर्थात् $\frac{-7}{-6} > \frac{6}{-5}$

•परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के ऐसे अनेक जोड़े लीजिए, जिनमें $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

प्रयास कीजिए :

- परिमेय संख्याओं $\frac{3}{2}$ और $\frac{3}{-2}$ में कौन बड़ी है।
- परिमेय संख्याओं $\frac{1}{2}$ और $\frac{-3}{4}$ में कौन बड़ी है।
- परिमेय संख्याओं $\frac{0}{1}$ और $\frac{-1}{2}$ में कौन बड़ी है।

उपर्युक्त परिमेय संख्याओं के तीनों $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ रूप के जोड़ों को निम्नांकित सारणी में देखिए। प्रत्येक के संगतadऔर bc के मानों को ज्ञात करके तुलना कीजिए। खाली जगह भरिए :

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$	$a \times d = ad$	$b \times c = bc$	ad और bc की तुलना
$\frac{1}{2} > \frac{-3}{4}$	$1 \times 4 = 4$	$2 \times (-3) = -6$	Q $4 > -6$ $\therefore ad \square bc$
$\frac{0}{1} > \frac{-1}{2}$	$0 \times 2 = ...$	$1 \times (-1) = -1$	Q $0 > -1$ $\square$
$\frac{3}{2} > \frac{-3}{2}$	$3 \times 2 = ...$	$2 \times (-3) = ...$	Θ ... > ... $\square$

उपर्युक्त सारणी से यह निष्कर्ष निकलता है कि

यदि दो परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ ऐसी हैं कि $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ तो ad > bc, जहाँ b और d दोनों धनात्मक संख्याएँ हैं।

इस प्रगुण का प्रयोग कर हम दो परिमेय संख्याओं की तुलना कर सकते हैं। इसी प्रकार $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ प्रकार की दो परिमेय संख्याओं के कुछ जोड़े $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ लीजिए। दोनों में हरों b और d को धनात्मक बनाते हुए प्रत्येक के संगत ad और bcज्ञात करके सत्यापन कीजिए कि ad < bc । इस प्रगुण का प्रयोग दो परिमेय संख्याओं की तुलना में कर सकते हैं।

उदाहरण 3: परिमेय संख्याओं $\frac{4}{-7}$ और $\frac{-3}{5}$ में कौन बड़ी है ?

हल : $\frac{4}{-7} = \frac{-4}{7} = \frac{a}{b}$

$\frac{-3}{5} = \frac{c}{d}$

यहाँ ad = –4×5 = –20

bc = 7×(–3) = –21

चूँकि –20 > –21

अत: $\frac{4}{-7} > \frac{-3}{5}$

निष्कर्ष :

दो परिमेय संख्याओं की परस्पर तुलना करते समय उनके हरों को धनात्मक बनाना आवश्यक है।

उदाहरण 4: परिमेय संख्याओं $\frac{-7}{9}, \frac{-5}{21}$ और $\frac{2}{-3}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

हल : दी गयी परिमेय संख्याओं को धनात्मक हर के रूप में व्यक्त करने पर $\frac{-7}{9}, \frac{-5}{21}$ और $\frac{-2}{3}$ प्राप्त होते हैं।

9, 21और 3 का ल0स0 63 है,

अब दी गयी परिमेय संख्याओं को 63 हर वाली परिमेय संख्याओं के रूप में लिखने पर

$\frac{-7}{9} = \frac{(-7) \times 7}{9 \times 7} = \frac{-49}{63}$

$\frac{-5}{21} = \frac{(-5) \times 3}{21 \times 3} = \frac{-15}{63}$

$\frac{-2}{3} = \frac{(-2) \times 21}{3 \times 21} = \frac{-42}{63}$

प्राप्त परिमेय संख्याओं के अंशों –49, –15, –42 को घ:ते क्रम में रखने पर

$-15 > -42 > -49$

अत: इनका आरोही क्रम

$-49 < -42 < -15$

इस प्रकार $\frac{-49}{63} < \frac{-42}{63} < \frac{-15}{63}$

अर्थात् $\frac{-7}{9} < \frac{2}{-3} < \frac{-5}{21}$

परिमेय संख्याओं का अनुक्रम (order) प्रगुण

(i) कोई भी धन परिमेय संख्या लेकर शून्य से इसकी तुलना कीजिए। जैसे

$\frac{5}{7}$ और 0 में कौन बड़ा है ?

$0 = \frac{0}{7}$

चूँकि $5 > 0$

अत: $\frac{5}{7} > \frac{0}{7}$ या $\frac{5}{7} > 0$

इससे हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि :

प्रत्येक धन परिमेय संख्या शून्य से बड़ी होती है।

(ii) अब कोई ऋण परिमेय संख्या लेकर इसकी शून्य से तुलना कीजिए। इस प्रक्रिया को कई ऋण परिमेय संख्याएँ लेकर कीजिए, यथा

$\frac{-4}{9}$ और 0 में कौन बड़ा है।

$0 = \frac{0}{7}$

चूँकि $0 > -4$

तथा $\frac{0}{9} > \frac{-4}{9}$

अत: $0 > \frac{-4}{9}$ अथवा $\frac{-4}{9} < 0$

इससे हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

प्रत्येक ऋण परिमेय संख्या शून्य से छोटी होती है।

(ii) प्रत्येक शून्येतर परिमेय संख्या या तो धनात्मक होती है, या ऋणात्मक। अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

प्रगुण (i) प्रत्येक परिमेय संख्र्या x के लिए निम्नांकित में से कोई एक सत्य है :

(i) $x > 0$ **(ii)** $x = 0$ **(iii)** $x < 0$

II) यदि x और y दो परिमेय संख्याएँ हों, तो निम्नांकित में से कोई एक सम्बन्ध सत्य है :

(i) $x > y$ **(ii)** $x = y$ **(iii)** $x < y$

दो परिमेय संख्याओं में बड़ी परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित क्रिया-पद हैं :

(1) परिमेय संख्याओं के हरों को धनात्मक बनाते हैं।

(2) यदि दोनों परिमेय संख्याओं में से एक धनात्मक और दूसरी ऋणात्मक है, तो धनात्मक परिमेय संख्या ही बड़ी परिमेय संख्या है।

(3) यदि दोनों परिमेय संख्याओं में दोनों समान चिह्नों की हों, तो उनके हरों को समान बनाया जाता है। दोनों परिमेय संख्याओं के हरों के निरपेक्ष मानों का ल0स0 को ज्ञात कर समान हर वाली परिमेय संख्याएँ प्राप्त करते हैं।

(4) समान हर वाली इस प्रकार प्राप्त परिमेय संख्याओं के अंशों की तुलना करते हैं। बड़ें अंश के संगत परिमेय संख्या ही बड़ी परिमेय संख्या है।

(5) यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ धनात्मक हर के रूप में हैं, तो

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, यदि $ad = bc$

(ii) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, यदि $ad > bc$

(iii) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, यदि $ad < bc$

अभ्यास 1 (c)

1. निम्नांकित दो परिमेय संख्याओं में कौन बड़ी है ?

(क) $\frac{-4}{9}, \frac{7}{9}$ **((ख))** $\frac{-3}{4}, \frac{-5}{8}$

(ग) $\frac{-7}{12}, \frac{5}{-8}$ **(घ)** $\frac{-5}{9}, \frac{-3}{-13}$

2. निम्नांकित दो परिमेय संख्याओं में कौन छोटी है ?

(क) $\frac{-4}{9}, \frac{5}{-9}$ **((ख))** $\frac{6}{1}, \frac{-7}{-1}$

(ग) $\frac{16}{-7}, 3$ **(घ)** $\frac{4}{-3}, \frac{-8}{9}$

3. निम्नांकित प्रश्नों में उत्तर के चार विकल्प दिये गये हैं, जिनमें से एक सही है। सही उत्तर छाँटिए।

(क) परिमेय संख्या $\frac{-4}{18}$ के समतुल्य परिमेय संख्या है :

(i) $\frac{2}{-9}$ **(ii)** $\frac{6}{27}$ **(iii)** $\frac{2}{9}$ **(iv)** $\frac{4}{18}$

(ख) परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ से बड़ी परिमेय संख्या है :

(i) $\frac{4}{10}$ **(ii)** $\frac{-4}{10}$ **(iii)** $\frac{6}{10}$ **(iv)** $\frac{7}{10}$

(ग) परिमेय संख्या $\frac{4}{9}$ से छोटी परिमेय संख्या है :

(i) $\frac{-11}{18}$ **(ii)** $\frac{13}{18}$ **(iii)** $\frac{12}{27}$ **(iv)** $\frac{1}{8}$

(घ) परिमेय संख्या $\frac{0}{-5}$से बड़ी परिमेय संख्या है :

(i) $\frac{-1}{5}$ **(ii)** $\frac{-2}{-7}$ **(iii)** $\frac{-1}{8}$ **(iv)** $\frac{4}{-9}$

4. अपनी अभ्यास पुस्तिका में उतार कर खाली स्थान $\square$ में >, = या <में से जो उपयुक्त हो, भरिए :

(क) $\frac{-4}{7} \square \frac{6}{13}$ **((ख))** $\frac{-4}{5} \square \frac{-5}{7}$

(ग) $\frac{-7}{8} \square \frac{21}{-24}$ **(घ)** $\frac{-9}{-10} \square \frac{8}{9}$

5. निम्नांकित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए :

$\frac{3}{5}, \frac{-7}{6}, \frac{8}{-12}, \frac{-17}{-30}$

6. निम्नांकित परिमेय संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए :

$\frac{4}{7}, \frac{-5}{6}, \frac{-3}{-12}, \frac{1}{-24}$

दक्षता अभ्यास - 1

1. इस प्रश्नके प्रत्येक खंड में उत्तर के चार विकल्प दिये गये हैं। इनमें से केवल एक सही है। सही उत्तर अपनी अभ्यास-पुस्तिका में लिखिए।

(क) किसी परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्याएँ होती हैं :

(i)एक (ii) दो

(iii) 50 (iv) अनन्त

(ख) परिमेय संख्या $\frac{-16}{80}$ का सरलतम रूप है :

(i) $\frac{1}{5}$ **(ii)** $\frac{-1}{-5}$

(iii) $\frac{-1}{5}$ **(iv)** $\frac{-2}{5}$

(ग) परिमेय संख्या $\frac{40}{-25}$ का सरलतम रूप है :

(i) $\frac{8}{27}$ **(ii)** $\frac{-8}{5}$

(iii) $\frac{16}{-5}$ **(iv)** $\frac{-8}{25}$

(घ) दो असमान परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ होती हैं :

(i) 10 **(ii)** 20

(iii) अनन्त **(iv)** 111

2. निम्नांकित कथनों में सत्य और असत्य बताइए :

(क) समान परिमेय संख्याओं के सरलतम रूप समान होते हैं।

(ख) $\frac{-7}{-1}$ धन परिमेय संख्या है।

(ग) $\frac{+4}{-9}$ धन परिमेय संख्या है।

(घ) $\frac{3}{-1}$ और $\frac{-3}{1}$ समान हैं ।

(च) $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\dots$ एक ही परिमेय संख्या के वि भिन्न रूप हैं।

(छ) $\frac{-1}{-3},\frac{-2}{-6},\frac{-3}{-9},\dots$ वि भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं।

(ज) $\frac{-4}{-5}$ और $\frac{4}{5}$ समान परिमेय संख्याएँ हैं ।

(झ) सभी पूर्णांक, परिमेय संख्या हैं।

(ट) सभी परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।

(ठ) $\frac{0}{5}$ और $\frac{0}{-3}$ समान परिमेय संख्याएँ नहीं हैं।

(ड) दो असमान परिमेय संख्याओं के बीच अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।

3. निम्नांकित परिमेय संख्याओं को अवरोही क्रम में लि(िख)ए :

(क) $\frac{2}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\frac{1}{6}$ **(ख)-** $\frac{-4}{1},\frac{1}{-3},\frac{-5}{7},\frac{-3}{4}$

(ग) $\frac{5}{-9},\frac{-7}{12},\frac{7}{-18},\frac{-2}{3}$ **(घ)** $\frac{-3}{4},\frac{5}{-12},\frac{-7}{16},\frac{9}{-24}$

इस इकाई में हमने सीखा है

1. $\frac{p}{q}$ के रूप की संख्याएँ अथवा $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त की जा सकने वाली संख्याएँ, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$, परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।

2. सभी भिन्नें परिमेय संख्याएँ होती हैं किन्तु सभी परिमेय संख्याएँ भिन्न नहीं होतीं।

3. समान चिह्न के अंश तथा हर वाली परिमेय संख्याएँ धनात्मक होती हैं। ऐसी परिमेय संख्याएँ भिन्न होती हैं।

4. असमान चिह्न के अंश तथा हर वाली परिमेय संख्याएँ ऋणात्मक होती हैं।

5. यदि ज् एक पूर्णांक है, तो $p=\frac{p}{1}=\frac{2p}{2}=\frac{3p}{3}=\cdots=\frac{-p}{-1}=\frac{-2p}{-2}=\frac{-3p}{-3}=\cdots$ अत: सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ हैं।

6. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश और हर में शून्येतर पूर्णांक से गुणा करें अथवा भाग दें, तो हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है, जो दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्या कही जाती है।

7. परिमेय संख्या $\frac{x}{y}$ का सरलतम रूप $\frac{x \div m}{y \div m}$ होता है, जहाँ m परिमेय संख्या के अंश x और हर y के निरपेक्ष मानों का महत्तम समापवर्तक है। परिमेय संख्याओं का सरलतम रूप ही उसका मानक रूप होता है।

8. संख्या रेखा का एक ही बिन्दु अनन्त समतुल्य परिमेय संख्याओं को निरूपित करता है।

9. दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।

10. यदि $\frac{a}{b}$ **और** $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ है तोs $\frac{a}{b} >,=,< \frac{c}{d}$, जहाँ b और d दोनों धनात्मक हैं।

11. प्रत्येक धन परिमेय संख्या शून्य से बड़ी होती है तथा प्रत्येक ऋण परिमेय संख्या शून्य से छो:ी होती है।

उत्तरमाला

अभ्यास 1(a)

1. $\frac{-7}{1}; \frac{1}{1}, \frac{27}{1}, \frac{-45}{1}, \frac{71}{1}$ **2.** (क) $\frac{8}{-10}$ (ख) $\frac{-16}{20}$ (ग) $\frac{20}{-25}$ (घ) $\frac{-24}{30}$; **3.(क)** $\frac{5}{7}$, ((ख)) $\frac{-10}{-14}$, (ग) $\frac{15}{12}$, (घ) $\frac{-25}{-35}$; **4.** (क) $\frac{9}{1}$, ((ख)) $\frac{-11}{17}$, (ग) $\frac{4}{19}$, (घ) $\frac{-7}{13}$; **5.(क)** $\frac{7}{-13}$, (ख) $\frac{11}{19}$, (ग) $\frac{18}{-23}$, (घ) $\frac{19}{23}$; **6.** (क) धनात्मक, $\frac{9}{13}$, (ग) धनात्मक $\frac{7}{23}$; **7.** (क)ऋणात्मक, $\frac{-7}{11}$ (ग) ऋणात्मक, $\frac{-8}{35}$. **8.** **(क)** $\frac{-3}{7}$, (ख) $\frac{2}{3}$, (ग) $\frac{-7}{2}$, (घ) $\frac{-9}{16}$; **9.** (क) 15, -21, (ख) 15, 40, (ग) 18, -45, (घ)-30, -16; **10.** (क) $\frac{2}{5}=\frac{-20}{-50}=\frac{-6}{-15}=\frac{8}{20}$ आदि, (ख) $\frac{7}{-11}=\frac{-7}{22}=\frac{-14}{2}=\frac{-21}{3}$ आदि, (ग) $\frac{-8}{-5}=\frac{8}{5}=\frac{-16}{-10}=\frac{24}{15}$ आदि

ध्यान दें कि किसी परिमेय संख्या के समतुल्य अनगिनत परिमेय संख्याएँ होती हैं, उनमें से कोई तीन ली गयी हैं।

अभ्यास 1(b)

1. (क) $\frac{-2}{5}$, (ख) $\frac{3}{4}$, (ग) $\frac{5}{9}$, (घ) $\frac{2}{11}$, **2.** (क) $\neq$ (ख) = (ग) $\neq$, (घ) $\neq$,**3.** (ख) समान, (ग) समान,

4. (क)

(ख)

(ग)

(घ)

5. (ख) असमान

अभ्यास 1(c)

1. (क) $\frac{7}{9}$, (ख) $\frac{-5}{8}$, (ग) $\frac{-7}{12}$, (घ) $\frac{-3}{-13}$. **2.**(क) $\frac{5}{-9}$, (ख) $\frac{6}{1}$, (ग) $\frac{16}{-7}$, (घ) $\frac{4}{-3}$; **3.** (क) (i) $\frac{2}{-9}$, (ख) (iv) $\frac{7}{10}$, (ग) (i) $\frac{-11}{18}$, (घ) (ii) $\frac{-2}{-7}$; **4.** (क) < (ख) < (ग) = (घ) >; **5.** $\frac{-7}{10}$, $\frac{8}{-15}$, $\frac{-17}{-30}$, $\frac{3}{5}$; **6.** $\frac{4}{7}$, $\frac{-3}{-12}$, $\frac{11}{-24}$, $\frac{-5}{6}$;

दक्षता अभ्यास 1

1. (क) (iv) अनन्त, (ख) (iii) $\frac{-1}{5}$ (ग) (ii) $\frac{-8}{5}$ (घ) (iii)अनन्त,, **2.** (क) सत्य, (ख) सत्य, (ग) असत्य, (घ) सत्य, (च) सत्य, (छ) असत्य, (ज) सत्य, (झ) सत्य,(ट) असत्य, (ठ) असत्य, (ड) सत्य, 3. (क) $\frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$; (ख) $\frac{1}{-3}, \frac{-4}{1}, \frac{-5}{7}, \frac{-3}{4}$, (ग) $\frac{7}{-18}, \frac{5}{-9}, \frac{-7}{12}, -\frac{2}{3}$, (घ) $\frac{9}{-24}, \frac{5}{-12}, \frac{-7}{16}, \frac{-3}{4}$,

इकाई : 2 घातांक

AQT888

- **घातांकों के नियम**
- **परिमेय संख्याओं को घात के रूप में व्यक्त करना**
- **धनात्मक एवं ऋणात्मक घातांक**
- **बड़ी एवं छोटी संख्याओं को घातांकीय रूप में व्यक्त करके उनकी तुलना करना**

2.1 भूमिका

जैसा कि हम जानते हैं कि प्राकृतिक संख्याओं के अनन्त समूह में कोई भी संख्या सबसे बड़ी नहीं होती। अब एक संख्या 11000000000000000000000 लीजिए। क्या आप इसे आसानी से पढ़ सकते हैं ?

इसी प्रकार अब चाहे पृथ्वी का द्रव्यमान किग्रा में 868000000000000000000000 हो या द्रव्य के मूल कण परमाणु के इलेक्ट्राख्न पर आवेश 0.0000000000000000000016 कूलॉम्ब , सुगमता से दोनों ही नहीं पढ़े जा सकते हैं। फलस्वरूप इन संख्याओं अथवा ऐसी ही अन्य संख्याओं को पढ़ना उनका योग और अन्तर ज्ञात करना तथा कभी-कभी तुलना करना अथवा उपयुक्तानुसार गुणन, सामान्य विधियों द्वारा नितान्त दुश्कर है।

अत: ऐसा ही अध्ययन सम्बन्धी उत्पन्न गणितीय समस्याओं के निवारण के उद्देश्य से घातांकों को परिभाषित कर उनके प्रयोग की प्रणाली विकसित की गयी और वह आवश्यकतानुसार उपयोग में प्रयुक्त भी हुई।

इस अध्याय में अब हम संख्याओं के आधार और उनसे सम्बन्धित घात के बारे में चर्चा करेंगे और उनका प्रयोग किस प्रकार किया जाता है, यह भी सीखेंगे।

2.2 घातांक

आइये संख्या 100000 लें तथा उसे निम्न प्रकार लिखें

$$100000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

यहाँ गुणन में संख्या 10 लगातार 5 बार प्रयुक्त हुई है। इसे संक्षिप्त रूप में 105 लिखा तथा दस की घात पाँच (ten to the power five) कहकर पढ़ा जाता है। संख्या के इस प्रकार के सांकेतिक रूप में संख्या 10 को आधार (base) तथा संख्या 5 को घात (power of index or exponent) कहा जाता है।

इसी प्रकार संख्या 10000 लें, तब

$10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$ है

संख्या 10 गुणन में चार बार प्रयुक्त है। अत: हम 10000 को घातांक रूप में 10^4 लिखते हैं।

पुन: $100 = 10 \times 10$ है।

यहाँ पर संख्या 10 गुणन में दो बार प्रयुक्त है।

अत: 100 को हम 10^2 लिखते हैं। सँख्याओं को आधार और उनके संगत घात द्वारा लिखना उनका घातांकीय रूप कहलाता है।

दशमलव संख्याओं और कतिपय भिन्न संख्याओं को हम ऋण घातांकों द्वारा सुविधानुसार व्यक्त करते हैं।

जैसे $0.01 = 1/100 = 1/10 \times 10 = 1/10^2 = 10^{-2}$

$0.001 = 1/1000 = 1/10 \times 10 \times 10 = 1/10^3 = 10^{-3}$

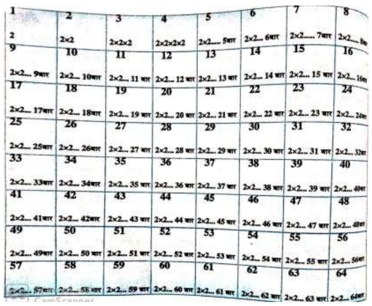
तथा इलेक्ट्रान पर आवेश

0.0000000000000000016 कूलाम्ब को घातांकों के प्रयोग द्वारा 1.6×10^{-19} कूलाम्ब सरल रूप में लिखते हैं।

इस प्रकार संख्याओं के बड़े और छोटे रूपों को संक्षिप्त रूप में लिखने और समझने में घातांकों का प्रयोग और उससे सम्बन्धित विषय सिद्धान्त द्वारा सरलता और सुगमता से प्रस्तुत कर सकते हैं।

क्रियाकलाप

वर्गतालिका



1	2	3	4	5	6	7	8
2	2×2	2×2×2	2×2×2×2	2×2.... 5बार	2×2... 6बार	2×2..... 7बार	2×2... 8बार
9	10	11	12	13	14	15	16
2×2... 9बार	2×2... 10बार	2×2... 11 बार	2×2... 12 बार	2×2... 13 बार	2×2... 14 बार	2×2... 15 बार	2×2... 16बार
17	18	19	20	21	22	23	24
2×2... 17बार	2×2... 18बार	2×2... 19 बार	2×2... 20 बार	2×2... 21 बार	2×2... 22 बार	2×2... 23 बार	2×2... 24बार
25	26	27	28	29	30	31	32
2×2... 25बार	2×2... 26बार	2×2... 27 बार	2×2... 28 बार	2×2... 29 बार	2×2... 30 बार	2×2... 31 बार	2×2... 32बार
33	34	35	36	37	38	39	40
2×2... 33बार	2×2... 34बार	2×2... 35 बार	2×2... 36 बार	2×2... 37 बार	2×2... 38 बार	2×2... 39 बार	2×2... 40बार
41	42	43	44	45	46	47	48
2×2... 41बार	2×2... 42बार	2×2... 43 बार	2×2... 44 बार	2×2... 45 बार	2×2... 46 बार	2×2... 47 बार	2×2... 48बार
49	50	51	52	53	54	55	56
2×2... 49बार	2×2... 50 बार	2×2... 51 बार	2×2... 52 बार	2×2... 53 बार	2×2... 54 बार	2×2... 55 बार	2×2... 56बार
57	58	59	60	61	62	63	64
2×2... 57बार	2×2... 58 बार	2×2... 59 बार	2×2... 60 बार	2×2... 61 बार	2×2... 62 बार	2×2... 63 बार	2×2... 64बार

अध्यापक बच्चों को 2 की 2 से गुणन पुनरावृत्ति बड़े वर्ग के उपवर्ग संख्या तक करायें। गुणन की इस प्रकार की क्रिया एक के बाद अगले स्तर पर कठिन से कठिनतर होती जाती है। जैसे छठे उपवर्ग के लिए दो का गुणन 2X2X2x22X2= 64 होगा। जिसे घातांक रूप में 2^6 लिखते हैं। अब इसी प्रकार यदि ध्यान से देखें तो 30 वें उपवर्ग में जो संख्या होगी, वह है 2X2X2.......... तीस बार = 107502८24 = 2^{30} (सरलतम रूप में) अब सोंचे कि यदि हम 64वें खाने में इस प्रकार की दी गयी विधि से संख्या लिखने का प्रयास करे ं तो वह संख्या अंक प्रसार की दृष्टि से काफी बड़ी होगी। परन्तु सरलतम रूप में घातांकों के माध्यम से उसे 2^{64} लिखा जा सकता है। इस प्रकार घातांक की अभिधारणा बड़ी संख्याओं को सरल तरीके से लिखने में सहायक है और सहायता प्रदान करती है।

आधार 10 के अतिरिक्त अन्य आधार से सम्बन्धित संख्याओं को घाताकों में लिखना

उदाहरण 1: 64 को घातांक में लिखिए।

हल   :2X2X2x22X2= 64

संख्या 2 गुणन में 6 बार लगातार प्रयुक्त

=2^6

यहाँ संख्या 64 को घातांक रूप में व्यक्त करने के लिए आधार संख्या 2 तथा घात 6 की संख्या प्रयुक्त हुई है।

पुन: लिखिए 64= 4X4X4

यहाँ संख्या 4 गुणन में 3 बार लगातार प्रयुक्त है

इसलिए $64 = 4^3$

यहाँ यह सोचिए कि $64 = 2^6 = 4^3$ है तो यह घातांकों पर आधारित क्या किसी नियम के अनुसार सरलता से $2^6 = 4^3$ सीधे-सीधे लिखा जा सकता है।

इसके बारे में आगे जानने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 2: निम्न 1,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000 को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

हल :1,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000

=10 X 10X 10X X10

यहाँ संख्या 10 गुणन रूप में 21 बार प्रयुक्त है।

अत: दी गई संख्या = 10^{21} है।

पुन: जिसमें दी गयी संख्या के लिए 10 आधार और संख्या 21 घातांक है।

2.3 संख्याओं के घातांकीय रूप में आधार एवं घातांक

निम्नांकित सारणी को देखिए :

घातीय संकेतन(घात) रुप	गुणा रुप	मान	आधार	घातांक
2^3	$2 \times 2 \times 2$	2	2	3
3^2	3×3	9	3	2
5^6	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	15625	5	6

प्रयास कीजिए :

6^5 में आधार और घातांक बताइए।

125 को घातांकीय रूप में लिखिए। आधार और घातांक भी बताइए।

343 को घातांकीय रूप में लिखिए। आधार और घातांक भी बताइए।

कुछ घातों के विशिष्ट नाम हैं। उदाहरणार्थ

10^2, जो 10 के ऊपर घात दो या 10 की घात 2 है। इसे 10 का वर्ग (10 Square)ढ़ा जाता है।

10^3, जो 10 के ऊपर घात तीन या 10 की घात 3 है। इसे 10 का घन (10 cube) पढ़ा जाता है।

5^3 को 5 का घन पढ़ेंगे और इसका अर्थ है : $5 \times 5 \times 5$

अर्थात् $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

उदाहरण 3: 3^4 तथा 4^3 में कौन सी संख्या बड़ी है और क्यों?

हल : $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

आप जानते हैं $81 > 64$

अत: $3^4 > 4^3$

अर्थात् 3^4 तथा 4^3 में 3^4 बड़ी संख्या है।

उदाहरण 4: 2^8 और 8^2 में कौन सी संख्या बड़ी है।

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

$8^2 = 64$

$256 > 64$ अर्थात् $2^8 > 8^2$

अत: 2^8 और 8^2 में 28 बड़ी संख्या है।

ध्यान दें कि पूर्णांकों की भाँति ही किसी परिमेय संख्या को उसी परिमेय संख्या के द्वारा कई बार गुणन को भी घातीय संकेतन द्वारा व्यक्त कर सकते हैं, जैसे

$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$ जिसका आधार $\frac{2}{3}$ तथा घातांक 4 है तथा इसे भाr '$\frac{2}{3}$ की घात 4' पढ़ते हैं।

इसी प्रकार $\left(\frac{-5}{6}\right) \times \left(\frac{-5}{6}\right) \times \left(\frac{-5}{6}\right) \times \left(\frac{-5}{6}\right) \times \left(\frac{-5}{6}\right) = \left(\frac{-5}{6}\right)^5$ जिसका आधार $\left(\frac{-5}{6}\right)$ तथा घातांक 5 है। इसे '$\left(\frac{-5}{6}\right)$ की घात5' पढ़ेंगे।

आप संक्षिप्त रूप से लिखने की इस विधि को तब भी लागू कर सकते हैं, जब आधार एक ऋणात्मक पूर्णांक हो ।

सोचिए, $(-2)^3$ का क्या अर्थ है?

यहाँ $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$

$= -8$

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

$= +16$

आइए हम कोई निश्चित संख्या लेने के स्थान पर यदि किसी संख्या a को आधार लेते हैं, तो संख्या को निम्नलिखित रूप में व्यक्त करते हैं:

$a \times a\,{}^{2}\,a = a^3$ (इसे a की घात 3 या a का घन पढ़ेंगे)

$a \times a \times a \times a \times a = a^5$ (इसे a की घात 5 पढ़ेंगे)

उदाहरण 5: - निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

$(1)^5$, $(1)^7$, $(-1)^4$, $(-1)^5$, $(-5)^4$ और $(-10)^5$

हल -

A. हमें प्राप्त है $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$

$= 1$

B.इसी प्रकार $(1)^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$

$= 1$

(विशेष :- 1 की किसी भी घात का मान सदैव 1 के बराबर होता है।

C. $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

$= +1$

D. $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

$= -1$

E. $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$

$= (25) \times (25)$

$= 625$

F. $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10)$

$= 100\,{}^{2}\,(-10)$

$= -1000$

विशेष :इसी प्रकार अन्य उदाहरणों से आप देख सकते हैं कि ऋण चिह्न युक्त संख्या की कोई भी विषम घात का मान भी सदैव ऋणात्मक (–ive) होता है जबकि ऋण

चिह्न युक्त संख्या की समघात का मान धनात्मक होता है।

निम्नांकित सारणी को ध्यान सेदेखिए :

घातीय संकेतन(घात) रुप	गुणा रुप	मान	आधार	घातांक
$(-3)^4$	$(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$	81	−3	4
$(-5)^3$	$(-5)\times(-5)\times(-5)$	−125	−5	3
$(-7)^4$	$(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)$	2401	−7	4
5^6	$5\times5\times5\times5\times5\times5$	15625	5	6

निष्कर्ष :

उपर्युक्त सारणी में घात रूप में लिखी गयी संख्याओं के मान और उनके चिह्नों परध्यान देने पर हम देखते हैं कि : -

- **n कोई प्राकृतिकसंख्या होने पर, [धन पूर्णांक]^n =धन पूर्णांक**
- **n सम प्राकृतिकसंख्या होने पर, [ऋण पूर्णांक]^n =धन पूर्णांक**
- **n विषम प्राकृतिकसंख्या होने पर, [ऋण पूर्णांक]^n =ऋण पूर्णांक**
- **n सम प्राकृतिकसंख्या होने पर, $[-1]^n = 1$**
- **n विषम प्राकृतिकसंख्या होने पर, $[-1]^n = -1$**

प्रयास कीजिए :

1. 5^3 और 3^5 में कौन सी संख्या बड़ी है।

2. $6 \times 6 \times 6 \times 6$ का आधार 6 पर घातीय संकेतन क्या है ?

3. $(-1)^{17}$ का मान बताइए।

अभ्यास 2 (a)

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ का मान है।

(i) $\frac{32}{243}$ **(ii)** $\frac{-32}{243}$ **(iii)** $\frac{10}{15}$ **(iv)** $-\frac{10}{15}$

2. 3125 का घातीय संकेतन है :

(i) 5^5 **(ii)** 5^2 **(iii)** 5^3 **(iv)** 5^4

3. "2 की घात 7" का मान है :

(i) 49 **(ii)** 14 **(iii)** 128 **(iv)** 32

4.एक वर्गाकार क्यारी की भुजा 5 मी है। इसके क्षेत्रफल को घातीय संकेतन में लिखिए।

5.सरल कीजिये : **(i)** $2^4 \times 3^2$ **(ii)** $(-2)^3 \times (-10)^3$

6. 15625 के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कर 15625 को आधार 5 पर घातीय संकेतन के रूप में व्यक्त कीजिए।

2.4 घातांकों का नियम

नियम - 1एक ही आधार वाली घातीय संख्यों का गुणन

उदाहरण आइए $2^3 \times 2^4$ का मान ज्ञात करें

2^3 ² $2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$2^3 \times 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$

2^3 ² $2^4 = 2^{(3+4)}$

$= 2^7$

ध्यान दीजिए यहाँ 23 और 24 में आधार समान है और घातांकों 3 और 4 का योगफल 7 है।

उदाहरण 6: 43 ² 4^5 का मान ज्ञात कीजिए।

$4^3 = 4 \times 4 \times 4$ तथा $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

अत: $4^3 \times 4^5 = (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4)$

$= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

$= 4^8 = 4^{(3+5)}$

अर्थात्

$4^3 \times 4^5 = 4^8 = 4^{(3+5)}$

पुन $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$

तथा $\left(\frac{3}{5}\right)^6 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$

अत: $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right)$

$= \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^{10} = \left(\frac{3}{5}\right)^{(4+6)}$

अर्थात $\left(\frac{3}{5}\right)^{4} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{6} = \left(\frac{3}{5}\right)^{4+6} = \left(\frac{3}{5}\right)^{10}$

उदाहरण 7: $(-3)^2 \times (-3)^5$ **को ज्ञात कीजिए।**

$(-3)^2 \times (-3)^5 = [(-3)\times(-3)]\ 2\,[(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)]$

$= (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$

$= (-3)^7$

$(-3)^2 \times (-3)^5 = (-3)^{2+5}$

उदाहरण 8: $a^3 \times a^4$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

$a^3 \times a^4 = (a\times a\times a)\times(a\times a\times a\times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$

$= a^7$

इस प्रकार $a^3 \times a^4 = a^{3+4}$

$= a^7$

विशेष :ध्यान दीजिए उपर्युक्त सभी उदाहरणों में गुण्य और गुणक के आधार समान है।

प्रयास कीजिए :

1. $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$ का आधार पर $\frac{5}{6}$ पर धनादि संकेतन बताइए।

2. $(-5)^2\ 2\ (-5)^6 = (-5)^{\square}$

3. $a^2 \times a^3 = a^{\square}$

निष्कर्ष :

हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि यदि a एक शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धनपूर्णांक हों, तो

$\mathbf{a^m \times a^n = a^{m+n}}$

विशेष - $2^3 \times 3^2$ या 3^4 $^24^3$ प्रकार के घातांकों पर ध्यान दीजिए। क्या इन्हें आप जोड़ सकते हैं? इन घातांकों के आधार समान नहीं हैं। अत: इन घाताकों को नहीं जोड़ा जा सकता।

नियम –2: एक ही आधार वाली घातांकीय संख्याओं का भाग

आइए समान आधार परन्तु पृथक - पृथक घातों की संख्याओं का भाग करें।

उदाहरण 9: $2^7 \div 2^3$ को ज्ञात कीजिए।

$2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2}$

$= 2 \div 2 \div 2 \div 2$

$= 2^4$

इस प्रकार $2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$

अत: $2^7 \div 2^3 = 2^4$

उदाहरण 10: $5^5 \div 5^3$ को ज्ञात कीजिए।

(i) $5^5 \div 5^3 = \frac{5\times5\times5\times5\times5}{5\times5\times5}$

$= 5 \div 5 = 5^2$

$5^5 \div 5^3 = 5^{5-3}$

$= 5^2$

(ii) $a^4 \div a^2$ को ज्ञात कीजिए।

$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a}$

$= a^2$

अत: $a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = a^{4-2}$

$= a^2$

इसी प्रकार $7^8 \div 7^5$ को ज्ञात कीजिए।

$7^8 = 7 \text{ x } 7 \text{ x } 7 \text{ x } 7 \text{ x } 7 \text{ x } 7 \text{ x } 7 \text{ x } 7$

तथा$7^5 = 7 \text{ x } 7 \text{ x } 7 \text{ x } 7 \text{ x } 7$

अत: $7^8 \div 7^5 = \frac{7^8}{7^5} = \frac{7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7}$

$= \frac{(7\times7\times7\times7\times7)\times(7\times7\times7)}{(7\times7\times7\times7\times7)}$

$= (7\times7\times7)$

$= 7^3$

अथवा $\frac{7^8}{7^5} = 7^{8-5}$

अर्थात् $7^8 \div 7^5 = 7^{(8-5)}$

$= 7^3$

इसी प्रकार

$\left(\frac{5}{9}\right)^6 \div \left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}}{\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}}$

$= \frac{\left(\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\right)\times\left(\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\right)}{\left(\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\right)}$

$= \left(\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\right)$

$= \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^{(6-4)}$

अर्थात् $\left(\frac{5}{9}\right)^6 \div \left(\frac{5}{9}\right)^4 = \left(\frac{5}{9}\right)^{(6-4)}$

प्रयास कीजिए :

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए

(i) $10^6 \div 10^2$ (ii) $2^9 \div 2^9$ (iii) $7^{13} \div 7^{10}$

इस प्रकार के अन्य उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि :

यदि a एक शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हों, जहाँm > n, तो $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

पुन: देखिए,

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

तथा$3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

अत: $3^4 \div 3^7 = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$

$= \frac{(3 \times 3 \times 3 \times 3)}{(3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)}$

$= \frac{1}{(3 \times 3 \times 3)}$

$= \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^{(7-4)}}$

अर्थात् $\frac{3^4}{3^7} = \frac{1}{3^{(7-4)}}$

अत: $3^4 \div 3^7 = \frac{1}{3^{(7-4)}} = \frac{1}{3^3}$

इसी प्रकार,

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}$

$= \frac{\left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right)}$

$= \frac{1}{\left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right)}$

$= \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^5}$

$= \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{9-4}}$

अर्थात् $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{(9-4)}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^5}$

यदि a एक शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धनपूर्णांक हों, जहाँ $m < n$, तो $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

प्रयास कीजिए :

1. $4^3 \div 4^3 = 1$ होता है, इसकी सहायता से दिखाइए कि $4^0 = 1$.

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 1$, अत: दिखाइए कि $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

हम देखते हैं कि

$a^m \div a^m = 1$

अत: $a^{m-m} = 1$

नियम - 2 में n=m मानकर अर्थात घात समान होने पर ः

अर्थात $a^0 = 1$

इस प्रकार निष्कर्ष निकलता है कि

यदि a कोई शून्येतर परिमेय संख्या है, तो $a^0=1$

टिप्पणी : $a \neq 0$ क्योंकि 0 से भाग परिभाषित नही है।

नियम -3: किसी घात वाली संख्या का ज्ञात

उदाहरण 11:[(5)3]^4 का मान ज्ञात कीजिए।

$[(5)^3]^4 = (5)^3 \times (5)^3 \times (5)^3 \times (5)^3$

$= (5\times \times 5)\times (5\times 5\times 5)\times(5\times 5\times 5)\times(5\times 5 \times 5)$

$= 5\times5\times5\times5\times5\times 5\times 5\times 5\times5 \times 5\times5\times5$

$= 5^{12}$

$= 5^{(3 \times 4)}$

अर्थात् $[(5)^3]^4 = 5^{3\times4}$

इसी प्रकार, $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)$

$= \frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^6$

$= \left(\frac{4}{7}\right)^{2\times3}$

अर्थात् $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2\times3}$

प्रयास कीजिए :

(i) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{(5\times2)}$ **(ii)** $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^4\right]^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{(4\times3)}$

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि

यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो तथा m और n कोई दो धन पूर्णांक हों, तो $(a^m)^n = a^{(m \times n)}$

टिप्पणी : उपर्युक्त नियम a=0 के लिए भी सत्य है।

नियम 4- पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का गुणन

क्या आप 24 ² 34 को सरल कर सकते हैं ?

ध्यान दीजिए कि यहाँ पर दोनों पदों के घातांक समान हैं किन्तु आधार अलग हैं।

हल, $2^4 \times 3^4$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

तथा$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

अत: $2^4 \times 3^4 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 3)^4$

अर्थात् $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4$

इसी प्रकार से,

$\left(\frac{5}{7}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7}\right) \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)$

$= \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

$= \left(\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}\right)$

$= \left(\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}\right)^3$

अर्थात् $\left(\frac{5}{7}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}\right)^3$

इसी प्रकारदिखाइए कि :

(i) $\left(\frac{5}{6}\right)^5 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5 = \left(\frac{5}{6} \times \frac{6}{7}\right)^5 = \left(\frac{5}{7}\right)^5$

(ii) $\left(\frac{8}{9}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \left(\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि :

यदि a और bकोई दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ m तथा n एक धनपूर्णांक हो, तो $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

नियम 5 पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का भाग

देखिए ,

$8^5 \div 9^5 = \frac{8^5}{9^5} = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9}$

$= \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}$

$= \left(\frac{8}{9}\right)^5$

अर्थात् $8^5 \div 9^5 = \frac{8^5}{9^5} = \left(\frac{8}{9}\right)^5$

इसी प्रकार,

$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}}$

$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} \times \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} \times \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}\right)^3$

अर्थात् $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}\right)^3$

प्रयास कीजिए :

इसी प्रकार निम्नांकित कथनों की जाँच कीजिए :

(i) $5^3 \div 6^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3$ **(ii)** $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \div \left(\frac{3}{8}\right)^4 = \left(\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{8}}\right)^4$

(iii) $(20)^4 \div (4)^4$ को किस एक संख्या के घात 4 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उपर्युक्त अन्य उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि :

यदि a और b कोई दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हों तथा स् एक धनपूर्णांक हो, तो

$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ **तथा** $b^m \div a^m = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

उदाहरण 12: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \div \left(\frac{3}{4}\right)^8$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \div \left(\frac{3}{4}\right)^8 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10-8}$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2+2}$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^4$

$= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{81}{256}$

ध्यान दें, गुणा $(\times)$ से पहले भाग $(\div)$ को हल कीजिए।

सामूहिक चर्चा

1. $2^3 \times 2^6$ का आधार 2 पर घातीय संकेतन क्या होगा!
2. $(15)^0$ का मान कितना होगा।
3. $(13)^5$ का मान बताइए।
4. $(20)^4 \div (5)^4$ को किस संख्या के घात 4 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ?

अभ्यास 2 (b)

1.सरल कीजिए :

(i) $3^7 \times 3^8$ **(ii)** $6^4 \times 6^2 \div 6^5$ **(iii)** $5^9 \times 5^4 \div 5^8$

(iv) $2 \times 5^2 + 5 \times 2^5$ **(v)** $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ **(vi)** $\left(\frac{4}{9}\right)^3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^4 \div \left(\frac{4}{9}\right)^5$

2. सरल कीजिए : :

(i) $15^8 \times 15^{12} \div 15^{20}$ **(ii)** $25^3 \times 25^7 \div 25^{10}$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \div \left(\frac{1}{2}\right)^8$ **(iv)** $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{3}{4}\right)^5$

3. $(-1)^3 \times (-1)^2 \times (-1)^{15}$ का मान बताइए।

4. $(-1)^{49} \div (-1)^{25}$ का मान बताइए।

5. $3^{12} \times 3^7 \div 3^{25}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. अपनी अभ्यास पुस्तिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) $4 \times 4 \times 4$ ... बीस बार = $(...)^{20}$ **(ii)** $8 \times 7^6 = (...)^6$

(iii) $\frac{9^2}{5^2} = \left(\frac{9}{...}\right)^2$ **(iv)** $(3^8)^3 = (3)^{...}$

प्रश्न संख्या 7 से 9 तक में उत्तर का सही विकल्प छाँटकर लिखिए :

7. $5^5 \times 8^5$ का सरल रूप होगा :

(i) 40^5 **(ii)** 40^{10} **(iii)** 40^{25} **(iv)** 5^{40}

8. $(-3)^4 \div (-3)^2$ का मान होगा।

(i) 81 **(ii)** –81 **(iii)** 9 **(iv)** –9

9. $4 \times 5^2 + 5 \times 4^2$ का मान होगा। :

(i) 100 **(ii)** 80 **(iii)** 200 **(iv)** 180

2.5 परिमेय संख्याओं को घात के रूप में व्यक्त करना

हम जानते हैं कि परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के रूप की होती हैं। जहाँ p, q पूर्णांक होते हैं तथा $q \neq 0$; इस प्रकार सभी पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ हैं।

देखिए

$2 = (2)^1, 3 = (3)^1, \frac{4}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^1$,

$6 = (6)^1, 8 = (8)^1, 8 = (2)^3$,

$\frac{4}{9} = \left(\frac{4}{9}\right)^1$ तथा $\frac{4}{9} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\frac{16}{625} = \left(\frac{16}{625}\right)^1, \frac{\ }{625} = \left(\frac{4}{25}\right)^2$ तथा $\frac{16}{625} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$

$\frac{-27}{343}=\left(\frac{-27}{343}\right)^1$ और $\frac{-27}{343}=\frac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{7\times7\times7}=\left(\frac{-3}{7}\right)^3$

प्रयास कीजिए :

1. $\frac{16}{81}$ का आधार $\frac{4}{9}$ पर घात रूप बताइए।

2. किस भिन्न का घात रूप $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ है ?

ध्यान दें, जिस संख्या को घात रूप में केवल एक ही प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है, उसका घातीय संकेतन (घात रूप) अद्वितीय होता है, जैसे, $\frac{5}{12}=\left(\frac{5}{12}\right)^1, 6=6^1, 3=3^1, 17=17^1$ आदि।

यदि किसी संख्या को भिन्न- भिन्न आधारों पर घात रूप में व्यक्त किया जा सके तो उसका घातीय संकेतन अद्वितीय नहीं होता है। जैसे, परिमेय संख्या 729 को आधार 3 और 9 के घातीय संकेतनों मेंदेखिए :-

$729 = 3^6$ आधार3 घात 6

$729 = 9^3$ आधार 9 घात 3

$729 = 27^2$ आधार 27 घात 2

अत: उपर्युक्त उदाहरणों से हम पाते हैं कि :

1.किसी भी परिमेय संख्या को उसके घात 1 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जैसे, $a=(a)^1$

2.सभी अभाज्य संख्याओं का घातीय संकेतन अद्वितीय होता है।

3.भाज्य संख्याओं में कुछ का घातीय संकेतन अद्वितीय और कुछ का अद्वितीय नहीं होता।

पुन:देखिए,

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$

तथा $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3\times3}$

अत: $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2^5}{3^5}$

इसी प्रकार,

$\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^6$

या, $\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{4\times4\times4\times4\times4\times4}{7\times7\times7\times7\times7\times7}$

$= \frac{4^6}{7^6}$

अत: $\left(\frac{4}{7}\right)^6=\frac{4^6}{7^6}$

इसी प्रकार,

$\frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times...m$ बार $=\left(\frac{p}{q}\right)^m$

तथा $\frac{p\times p\times p...m \text{ बार}}{q\times q\times q...m \text{ बार}}=\frac{p^m}{q^m}$

अत: $\left(\frac{p}{q}\right)^m=\frac{p^m}{q^m}$

इस तथ्य का उपयोग करके हम किसी परिमेय संख्या के घातीय संकेतन (घात रूप) को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इसी प्रकार कुछ परिमेय संख्याओं को किसी परिमेय संख्या के घात रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है जैसे,

$\left(\frac{6}{7}\right)^3=\frac{6^3}{7^3}=\frac{216}{343}$

और $\frac{216}{343}=\frac{6\times6\times6}{7\times7\times7}=\left(\frac{6}{7}\right)^3$

ध्यान दें, पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं के गुणन सूत्र $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ का उपयोग करके भी कुछ परिमेय संख्याओं को घातीय संकेतन (घात रूप) में व्यक्त कर सकते हैं, जैसे,

$(27\times343) = 3^3\times7^3 = (3\times 7)^3 = (21)^3$

उदाहरण 13: 64 × 729 को आधार 6 पर घातीय संकेतन में व्यक्त कीजिए।

हल : $64 = 2\times 2\times 2\times2\times 2\times2 = 2^6$

$729 = 3\times \times3\times3\times3\times 3 = 3^6$

अत: $64\times 729 = 2^6\times 3^6 = (2\times 3)^6 = 6^6$ [**...** $a^m \times b^m = (a \times b)^m$]

अभ्यास 2 (c)

1. 12× 12×12×12×12× 12 को घात रूप में व्यक्त कीजिए।

2. 15625 को आधार 5, आधार 25 एवं आधार 125 के घातीय संकेतनों में व्यक्त कीजिए।

3. 0.0001 को आधार 0.01 पर घात रूप में व्यक्त कीजिए।

4. $\frac{-343}{512}$ को आधार $\frac{-7}{8}$ पर घात रूप में व्यक्त कीजिए।

5. $\frac{1000}{1331}$ को आधार $\frac{10}{11}$ पर घातीय संकेतन में व्यक्त कीजिए।

6. $\frac{1024}{1089}$ को वर्गरूप में व्यक्त कीजिए।

7. $\frac{512}{729}$ को घनरूप में व्यक्त कीजिए।

प्रश्न संख्या 9 से 11 तक के उत्तर का सही विकल्प छाँटिए :

9. 0.000001 का वर्ग रूप होगा :

(i) $(0.01)^2$ **(ii)** $(0.001)^2$ **(iii)** $(0.0001)^2$ **(iv)** $(0.00001)^2$

10. $(0.05)^3$ का मान होगा :

(i) 0.125 **(ii)** 0.0125 **(iii)** 0.00125 **(iv)** 0.000125

11. $\frac{64}{125}$ के घन रूप का आधार होगा :

(i) $\frac{2}{5}$ **(ii)** $\frac{4}{5}$ **(iii)** $\frac{8}{25}$ **(iv)** $\frac{4}{25}$

2.6 धनात्मक एवं ऋणात्मक घातांक

घातांक (–1) का अर्थ

देखिए, $2 \times \frac{1}{2} = 1,$ या $2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}$

$7 \times \frac{1}{7} = 1,$ या $7 = \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)}$

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1,$ या $\frac{3}{4} = \frac{1}{4/3}$

इसी प्रकार यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो तो,

$a \times \frac{1}{a} = 1,$ या $a = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)}$

हम जानते हैं कि ऐसी परिमेय संख्याएँ जिनका गुणनफल 1 के बराबर होता है, एक दूसरे की गुणात्मक प्रतिलोम (Inverse) अथवा व्युत्क्रम (Reciprocal) कहलाती हैं। अत: उपर्युक्त उदाहरणों में 2 का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{2}$ का गुणात्मक प्रतिलोम 2 होगा।

आप जानते हैं कि $10^2 = 10 \times 10$

$= 100$

$10^1 = \frac{10 \times 10}{10} = \frac{100}{10}$

$10^0 = \frac{10}{10} = 1$

इस प्रतिरूप को आगे बढ़ाने पर

$10^{-1} = \frac{1}{10}$

$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$

ध्यान दीजिए जब घातांक क्रमशः 1कम होता है तब मान पूर्व मान का $\frac{1}{10}$ अथवा दसवाँ भाग हो जाता है।

$10^{-1} = \frac{1}{10}$

इस प्रकार $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ या $10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$

$10^{-3} =$ या $\frac{1}{10^3}$ $10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$

इसी प्रकार $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$\frac{3^3}{3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{3} = \frac{27}{3}$

$3^2 = 3 \; ^2 \; 3 = 9$

$\frac{3^2}{3} = \frac{3 \times 3}{3} = \frac{9}{3}$

$3^1 = 3$

$\frac{3^1}{3} = \frac{3}{3}$

$3^0 = 1$

इन प्रतिरूपों से हम कह सकते हैं

$3^{-1} = \frac{1}{3}$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

$3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

निष्कर्ष :

किसी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ जहाँ m एक धनात्मक परिमेय संख्या है। a^{-m}, a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

प्रयास कीजिए :

(i) 7 का गुणात्मक प्रतिलोम क्या है ?

(ii) $\frac{1}{5}$ किस संख्या का व्युत्क्रम है ?

(iii) $\frac{4}{3}$ किस संख्या का व्युत्क्रम है ?

(iv) a का गुणनात्मक प्रतिलोम क्या होता है ? ($a \neq 0$)

हम जानते हैं कि a के गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{a}$ को a^{-1} भी लिखा जाता है। इसे 'a की घात (–1)'अथवा 'a व्युत्क्रम' पढ़ते हैं। इस प्रकार 2 का गुणात्मक प्रतिलोम 2^{-1}, 7 का गुणात्मक प्रतिलोम 7^{-1} है तथा $\frac{3}{4}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ है।

अत: $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, $\frac{1}{7} = 7^{-1}$, $\frac{4}{3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

इसी प्रकार, $2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $7 = \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$, $\frac{3}{4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$

पुन: देखिए,

$8 \times \frac{1}{8} = 1,$

$\frac{1}{8}$ = 8 का व्युत्क्रम

$= (8)^{-1}$

$8 \Rightarrow \frac{1}{1/8} = \frac{1}{8^{-1}}$

अर्थात् $\frac{1}{2^3} = (2^3)^{-1} = 2^{-3}$

इसी प्रकार, $\frac{1}{25} = 25$ का व्युत्क्रम

$\frac{1}{25} = (5^2)^{-1}$

अत: $\frac{1}{5^2} = (5^2)^{-1} = (5)^{-2}$

तथा $\frac{36}{49} = \frac{49}{36}$ का व्युत्क्रम $= \left(\frac{49}{36}\right)^{-1}$

अत: $\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \left[\left(\frac{7}{6}\right)^2\right]^{-1}$

$= \left(\frac{7}{6}\right)^{-2}$

उपर्युक्ततथ्य की संपुष्टि घातांक नियम (1) से भी कर सकते हैं, जैसे,

$a^{-3} \times a^3 = a^{-3+3} = a^0 = 1$

या $a^{-3} \times a^3 = 1$

अत: $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ तथा $a^3 = \frac{1}{a^{-3}}$

व्यापक रूप में, हम दे(ख)ते हैं कि

$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$

या, $a^{-n} \times a^n = 1$

अत: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ और $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

उपर्युक्त उदाहरणों से निष्कर्ष निकलता है कि :

1. किसी शून्येतर परिमेय संख्या की (–1) घात, उस संख्या के गुणात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम) के बराबर होता है। दूसरे शब्दों में, यदि $\frac{a}{b}$ कोई शून्येतर परिमेय संख्या हो तो उसका व्युत्क्रम $\frac{b}{a}$ होता है अर्थात् $\frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

2. यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो तथा ह कोई घनपूर्णांक हो तो a^n का गुणात्मक प्रतिलोम a^{-n} होता है और इसे 'a की घात (-n)' पढ़ते हैं।

टिप्पणी :

घातों के ऋणात्मक होने की दशा में पिछले नियम निम्न प्रकार पुन: परिभाषित किये जा सकते हैं-

(i) $a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$

(ii) $a^{-m} \times a^n = a^{-m+n}$

(iii) $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$

(iv) $a^m \div a^{-n} = a^m \text{ x } a^n$

(v) $a^{-m} \div a^n = a^{-m} \text{ x } a^{-n}$

(vi) $a^{-m} \div a^{-n} = a^{-m} \text{ x } a^n$

(vii) $(a^m)^{-n} = a^{-mn} = (a^{-m})^n$

(viii) $(a^{-m})^{-n} = a^{(-m)x(-n)} = a^{mn} = (a^m)^n$

(ix) $a^{-m} \times b^{-m} = (a \times b)^{-m}$

उदाहरण 14: $(-5)^{-4} \times (-5)^{-3}$ को सरल कीजिए।

(A) $(-5)^{-4} \times (-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^4} \times \frac{1}{(-5)^3}$

$\frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^3} = \frac{1}{(-5)^{4+3}} = \frac{1}{(-5)^7} = (-5)^{-7}$

$= (-5)^{-4\ 2} (-5)^{-3}$

$= (-5)^{(-4) + (-3)} = (-5)^{-7}$

(B) $(-7)^{-4\ 2} (-7)^2$ को सरल रूप में लिखिए।

$= \frac{1}{(-7)^4} \times (-7)^2$

$= \frac{(-7)^2}{(-7)^4} = \frac{1}{(-7)^{4-2}}$

$= \frac{1}{(-7)^2}$

$= (-7)^{-2}$

दूसरी विधि

$(-7)^{(-4)+(2)}$

$= (-7)^{-2}$

उदाहरण 15: $(-25)^{-3}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : $(-25)^{-3} = \frac{-1}{(25)^3} = \frac{-1}{25 \times 25 \times 25} = \frac{-1}{15625}$

उदाहरण 16: $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5}$ को सरल रूप में लिखिए।

$\left(\frac{2^5}{2^8}\right)^5 \times 2^5 = (2^{5-8})^5 \times 2^{-5}$

$= (2^{-3})^5 \times 2^{-5}$

$= 2^{-15} \times 2^{-5}$

$= 2^{(-15)+(-5)}$

$= 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}}$

उदाहरण 17: $\frac{1}{8} \times (3)^{-3} = \frac{1}{2^3} \times (3)^{-3}$ को सरल रूप में लिखिए।

प्रथम विधि **:** $\frac{1}{8} \times (3)^{-3} = \frac{1}{2^3} \times 3^{-3}$

$= 2^{-3} \times (3)^{-3} = (2 \times 3)^{-3}$

$= (6)^{-3} = \frac{1}{6^3}$

द्वितीय विधि $\frac{1}{8} \times 3^3$

$= \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{3^3}$

$= \frac{1}{(2 \times 3)^3} = \frac{1}{6^3}$

उदाहरण 18 : सरल कीजिए :

$2^5 \times (16)^{-2} \div 2^{-3}$

हल : प्रथम विधि :

$2^5 \text{ x } (16)^{-2} \div (2)^{-3}$

$= 2^5 \times \frac{1}{(16)^2} \div \frac{1}{2^3}$

$= 2^5 \times \frac{1}{(2^4)^2} \div \frac{1}{2^3} = 2^5 \times 2^{-8} \times 2^3$

$= 2^5 \times \frac{1}{2^8} \times \frac{2^3}{1} = 2^{5-8+3}$

$= \frac{2^5 \times 1 \times 2^3}{2^8 \times 1} = 2^0$

$= \frac{2^5 \times 2^3}{2^8} = 1$

$= \frac{2^{5+3}}{2^8} = \frac{2^8}{2^8} = 1$

द्वितीय विधि :

$2^5 \times (16)^{-2} \div (2)^{-3}$

$= 2^5 \times (2^4)^{-2} \times 2^3$

$= 2^5 \times 2^{-8} \times 2^3$

$= 2^5 \times 2^{-8} \times 2^3$

उदाहरण 19: सरल कीजिए : $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

हल : प्रथम विधि : $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$= \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \div \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 2}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$= \frac{1}{\frac{3^2}{4^2}} \div \frac{1}{\frac{2^4}{3^4}}$

$= \frac{4^2}{3^2} \div \frac{3^4}{2^4}$

$= \frac{4^2}{3^2} \times \frac{2^4}{3^4}$

$= \frac{16}{9} \times \frac{16}{81}$

$= \frac{256}{729}$

$= \frac{256}{729}$

द्वितीय विधि : $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$

$= \frac{4}{1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$

$= \frac{4}{1} \times \frac{64}{729}$

प्रयास कीजिए :

1. $(8)^2$ तथा $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$ में अन्तर बताइए।

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ का मान बताइए।

3. $(4)^{-4}$ का मान बताइए।?

4. निम्नांकित संख्या-युग्मों में प्रत्येक में कौन संख्या बड़ी है ?

(i) 5^3 तथा 5^{-3} **(ii)** 2^2 तथा 2^{-2} **(iii)** 2^3तथा $\frac{1}{2^{-3}}$

अभ्यास 2 (d)

1. $3^4 \times 3^5 \times 3^{-9}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ को सरल कीजिए।

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times 2^{2}$ का मान होगा :

(i) 2 **(ii)** 4 **(iii)** 8 **(iv)** 16

4. $3^{-2} \times 3^5$ का मान होगा :

(i) 3 **(ii)** 9 **(iii)** $\frac{1}{27}$ **(iv)** 27

5. निम्नांकित को सरल कीजिए :

(i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times 3^2 \div 3^{-3}$ **(ii)** $7^4 \times \left(\frac{1}{7}\right)^{3} \div 7$

(iii) $3^0 + 3^{-1} + 3^{-2}$ **(iv)** $(3^3)^3 \div\div (3)^{25} \times (3^4)^4$

6. $(2\times3)^6\times6^{-3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. $\left\{(4\times5)^{-2}\div\left(\frac{1}{10}\right)^{2}\right\}+\frac{3}{4}$ को सरल कीजिए।

8. $\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{0}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\right\}\div\left(\frac{7}{5}\right)^{2}$ को सरल कीजिए।

9. निम्नांकित को सरल कीजिए :

$2^{-2}-\{-2^{-3}-(2^{-2}-3^{-2})\}$

2.7 बड़ी तथा छोटी संख्याओं को घातांकों में प्रकट करना

निम्नांकित को देखिए :

$54 = 5.4\times10 = 5.4\times10^{1}$

$540 = 5.4\times100 = 5.4\times10^{2}$

$5400 = 5.4\times1000 = 5.4\times10^{3}$

$54000 = 5.4\times10000 = 5.4\times10^{4}$ इत्यादि।

यहाँ हमने 54, 540, 5400, 5400को मानक रूप (Standard Form) में व्यक्त किया है। इसी प्रकार

$0.54 = 5.4\times\frac{1}{10} = 5.4\times10^{-1}$

$0.054 = 5.4\times\frac{1}{100} = 5.4\times10^{-2}$

$0.0054 = 5.4\times\frac{1}{1000} = 5.4\times10^{-3}$

$0.00054 = 5.4\times\frac{1}{10000} = 5.4\times10^{-4}$, इत्यादि।

यहाँ भी संख्याओं को मानक रूप में ही व्यक्त किया गया है।

विशेष :

किसी भी संख्या को 1.0और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है परन्तु 10.0 सम्मिलित नहीं है और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। संख्या के इस रूप को उसका ‘मानक रूप’ या ‘वैज्ञानिक संकेतन’ कहते है।

प्रयास कीजिए :

1. 2136 को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

2.. वह संख्या कौन सी है जिसका मानक रूप 3.7×10^{-3} है?

3. .5 .4का मानक रूप 5.4×10^{0} होगा या 0.54×10^{-1}?

इस प्रकार

मानक रूप या वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त संख्याएँ $k \times 10^{n}$ **के रूप में लिखी जाती हैं जहाँ** $1 \le k < 10$ **तथा n एक पूर्णांक होता है और k एक दशमलव संख्या होती है।**

बहुत बड़ी और बहुत छोटी संख्याओं की तुलना

सूर्य का व्यास $=1.4\times10^{9}$ मी और पृथ्वी का व्यास 1.2756×10^{7} मी है। हम इनके व्यासों की तुलना करना चाहते हैं।

सूर्य का व्यास $=1.4\times\times10^{9}$ मी

पृथ्वी का व्यास -= 1.2756 ² 10^{7} मी

अत: $= \frac{1.4\times10^{9}}{1.2756\times 10^{7}} = \frac{1.4\times10^{9-7}}{1.2756}$

$= \frac{1.4\times 10^{2}}{1.2756}$ जो कि लगभग 100 गुना है।

अत: पृथ्वी के व्यास का लगभग 100 गुना है।

किसी बड़ी संख्या को मानक रूप में व्यक्त करना

आप जानते हैं कि बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग करके सुविधाजनक रूप में व्यक्त किया जा सकता है, आइए बड़ी संख्याओं को घातांको के प्रयोग से मानक रूप में लिखें

आप पढ़ चुके हैं कि संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करने के लिए संख्या को 1.0 से 10.0के बीच की एक दशमलव संख्या जिसमें 1.0समाहित है, (परन्तु 10नहीं) के रूप में बदलते हैं। उदाहरण के लिए 5985 का मानक रूप

$5985 = 5.985 \times1000$

$= 5.985\times10^{3}$

(दशमलव चिह्न तीन स्थान बाईं और खिसक गया है।)

पृथ्वी का द्रव्यमान =5976,000,000,000,000,000,000,000 किग्रा

पृथ्वी का द्रव्यमान $=5.976 \times 10^{24}$ किग्रा है।

अब आप इस बात से सहमत होंगे कि पढ़ने, समझने और तुलना करने की दृष्टि से मानक रूप में लिखी यह संख्या 25 अंक की संख्या की अपेक्षा बहुत अधिक सरल है

उदाहरण $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$

(दशमलव बिन्दु11 स्थान बाईं ओर खिसक गया है।

$0.000009 = \frac{9}{1000000} = \frac{9}{10^{6}} = 9 \times 10^{-6}$

(दशमलव बिन्दु 6 स्थान दाईं ओर खिसक गया है)

विशेष

मानक रूप में लिखी संख्याओं को जोड़ते समय संख्याओं को 10 के समान घात में बदलते हैं।

ध्यान दीजिए और विचार कीजिए :

5415 को 541.5×10, 54.15×100, 541.5×10^1 या 54.15×10^2 के रूप में भी लिखा जा सकता है। परन्तु ये 5415 के मानक रूप नहीं हैं। इस प्रकार

$5415 = 0.5415 \times 10000 = 0.5415 \times 10^4$ भी 5415 का मानक रूप नहीं है।

क्या 54.15×10^{-2} संख्या 0.5415 का मानक रूप है ?

उदाहरण 20:निम्नांकित संख्याओं को मानक रूप में लिखिए :

(i) 63000 **(ii)** 100000 **(iii)** 0.000045 **(iv)** 0.0001

हल : (i) $63000 = 6.3 \times 10000 = 6.3 \times 10^4$

स्पष्टत: यहाँ $k = 6.3$ तथा $n = 4$]

(ii) $100000 = 1 \times 100000 = 1 \times 10^5$

स्पष्टत: यहाँ $k = 1$ तथा $n = 5$]

(iii) $0.000045 = \frac{4.5}{100000} = \frac{4.5}{10^5} = 4.5 \times 10^{-5}$

(iv) 0.0001 = $\frac{1}{10000} = 1 \times \frac{1}{10^4} = 1 \times 10^{-4}$

उदाहरण 21:एक व्यक्ति अपने दैनिक भोजन में प्रतिदिन औसतन 3000 कैलोरी ऊर्जा ग्रहण करता है। वैज्ञानिक

संकेतन में प्रदर्शित कीजिए कि वह पूरे 1 वर्ष में कितनी कैलोरी ऊर्जा ग्रहण करेगा।

हल : 1 दिन में ग्रहण की गयी ऊर्जा= 3000 कैलोरी

∴ 365 दिन में ग्रहण की गयी ऊर्जा =365 × 3000 कैलोरी

= 1095000 कैलोरी

= 1.095×10^6 कैलोरी

उदाहरण 22: एक अनुमान के अनुसार भारतीय रेल एक दिन में लगभग 1करोड़ 30लाख यात्रियों को एक

स्थान से दूसरे स्थान पर पहुँचाती है। बताइए कि 30 दिनों में कितने यात्री रेल से यात्रा करते हैं। उत्तर मानक रूप

में दीजिए।

हल : ...1 दिन में यात्रा करने वाले रेल यात्रियों की संख्या = 1,30,00,000

∴ 30 दिन में यात्रा करने वाले रेल यात्रियों की संख्या = 1,30,00,000 ×30

= 39,00,00,000

= 3.9×10^8

उदाहरण 23: जनसंख्या गणना के अनुसार किसी दिन भारत की जनसंख्या 1,00,84,35,405 थी।

इसे वैज्ञानिक संकेतन में लिखिए।

हल : भारत की दी गई जनसंख्या= 1,00,84,35,405

= 1.008435405 ×1,00,00,00,000

= 1.008435405×10^9

= 1.008×10^9 लगभग

प्रयास कीजिए :

1. 425000 को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

2. 0.000035 को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

3. 3.54×10^5 को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

4. 7.52×10^{-4} को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

अभ्यास 2 (e)

1. 62,00,00,000 को मानक रूप में लिखिए।

2. 0.00008को वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए।

3.वैज्ञानिकों का अनुमान है कि चन्द्रमा की उत्पत्ति आज से लगभग 460 करोड़ वर्ष पहले हुई थी। चन्द्रमा की आयु वैज्ञानिक संकेतन द्वारा व्यक्त कीजिए।

4.पथ्वी की सूर्य से दूरी लगभग 15,00,00,000 किमी है। इस दूरी को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

5.पथ्वी का द्रव्यमान $5.98 \text{ x } (10)^{22}$ क्विंटल है। ज्ञात कीजिए कि साधारण संख्या के रूप में इसे लिखने पर 598 के आगे कितने शून्य रखने होंगे ?

6.निम्नांकित संख्याओं को वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए :

(i) 4250000 **(ii)** दो करोड़ बीस लाख

(iii) 0.000045 **(iv)** 0.0025

7. निम्नांकित को साधारण संख्या के रूप में लिखिए :

(i) $2.5\times (10)^4$ **(ii)** $1.75\times 10)^6$

(iii) $1.21\times (10)^{-8}$ **(iv)** $4.5\times (10)^{-5}$

(v) $2.3\times (10)^{-7}$ **(vi)** $2.5\times (10)^{-4}$

8.एक इलेक्ट्रान का द्रव्यमान$9.107 \times (10)^{-28}$ ग्राम है। इसे साधारण दशमलव भिन्न में बदलने पर दशमलव बिन्दु (.) तथा अंक 9 के बीच कितने शून्य होंगे ?

दक्षता अभ्यास- 2

1. $(-8)^7$ का गुणारूप में लिखिए।

2. $(-1)^{999}$ का मान बताइए।

3. $3^8 \times 3^{12}$ का आधार 3पर घातीय संकेतन लिखिए।

4. $9^7 \div 9^3$ का आधार 9 पर घातीय संकेतन लिखिए।

5. $8^{(5-5)}$ का मान बताइए।

6. $(2^3)^8$ का आधार 2 पर घातीय संकेतन बताइए।

7. –128 को (–2) के घातरूप में व्यक्त कीजिए।

8. $\left(\frac{7}{9}\right)^2 \div \left(\frac{14}{3}\right)^2$ को सरल कर मान ज्ञात कीजिए।

9. $(-4)^4$ किस संख्या का गुणनात्मक प्रतिलोम है ?

10.पथ्वी से चन्द्रमा की औसत दूरी 384400000 मीटर है। इसे वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए।

11.प्रकाश की एक किरण द्वारा वर्ष में तय की गयी दूरी 9460500000000000 मीटर है। इसे वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए।

12. $2^{38} \times 5^{32}$ का मान ज्ञात कीजिए तथा बताइए इसमें कुल कितने अंक हैं।

संकेत : $2^{38}\times 5^{32} = 2^6\times\ 2^{32}\times 5^{32} = 2^6\times (2\times 5)^{32} = 64\times\ (10)^{32} = 6.4\times (10)^{33}$]

13. एक ग्राम मानव मल में 10,00,000 वायरस होते हैं। इनका मान वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए।

14. गाँव के एक स्कूल में विश्व स्वच्छता दिवस पर बच्चों से हाथ धोने का अभ्यास कराया गया। प्रत्येक बच्चा

हाथ धोने में 2मिनट का समय लगाता है। यदि कक्षा में 64 बच्चे हों तो पूरी कक्षा के बच्चों को बारी-बारी से हाथ

धोने में लगे समय को घातांक में व्यक्त कीजिए।

15. एक कस्बे की आबादी के अधिकांश लोग श्वांस कि बीमारियों से iरस्त थे, जाँच करने पर उस कस्बे की

प्रदूषित वायु में 2000 विषाक्त जीवाणु प्रति घन मीटर पाये गये, जो कि एक सप्ताह में 100गुना बढ़ जाते हैं।

तीन सप्ताह बाद जीवाणुओं की संख्या को मानक संकेतांक में लिखिए।

इस इकाई में हमने सीखा

1. संख्याएँ घातांकीय रूप में प्रकट की जा सकती हैं। घातांकों के प्रयोग से बहुत बड़ी और बहुत

छोटी संख्याओं को पढ़ना, समझना, तुलना करना और उन पर संक्रियाएँ करना सरल होता है।

2. घातांकीय रूप में संख्याएँ कुछ नियमों का पालन करती हैं, जो संक्षेप में इस प्रकार हैं :

किन्हीं शून्येतर परिमेय संख्याओं a और b तथा पूर्ण संख्याओं m औरn के लिए,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(v) $a^m \times b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(vi) $a^0 = 1$

(vii) $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$

(viii) $(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

3. वैज्ञानिक संकेतन या मानक रूप में किसी संख्या को व्यक्त करने के लिए संख्या

को 1.0 और10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें1.0 सम्मिलित है तथा 10.0 सम्मिलित नहीं है)

और10की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है।

इसे भी जाने

1.एक ग्राम मानव मल में 100 जीवाणु अण्डे, 1000 जीवाणु कोश, 10,00,000 बैक्टीरिया तथा 1,00,00,000 वायरस होते हैं।

2. किसी जीवाणु की नाप 0.00000005 सेमी0 या 5.0×10^{-8} मी0 होता है।

3.पथ्वीसे सूर्य की दूरी 1,49,60,00,00,000 मी0 या 1.49×10^{11}मी0 होती हैं।

4.पथ्वी से चन्द्रमा की दूरी लगभग 38,44,67,000 मी0 या 3.84467×10^{8} मी0 होती हैं।

5. पथ्वी में 1,35,30,00,000 किमी^{3} या 1.353×10^{9} किमी^{3} समुद्र जल है।

6. एक आकाश गंगा में औसतन 1,00,00,00,00,000 या 1.0×10^{11} तारे हैं।

उत्तरमाला

अभ्यास 2 (a)

1. (ii) $-\frac{32}{243}$; **2.** (i) 5^5; **3.** (iii) 128; **4**. 5^2 वर्ग मी;

5. (i) 144, (ii) 8000 **6.** 5^6;

अभ्यास 2 (b)

1. (i) 3^{15}, (ii) 6, (iii) 5^5, (iv) 210, (v) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$, (vi) $\left(\frac{4}{9}\right)^2$,

2.(i) 1, (ii) 1, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; **3.** 1; **4.** 1; **5.** 3^{-6}**;**

6. (i) 4, (ii) 8 x 7 या 56, (iii) 5, (iv) 24,

7. (i) $(40)^5$; **8.** (iii) 9; **9.** (iv) 180;

अभ्यास 2 (c)

1. $(12)^6$; **2.** 5^6, $(25)^3$, $(125)^2$; **3.** $(.01)^2$; **4.** $\left(\frac{-7}{8}\right)^3$;

5. $\left(\frac{10}{11}\right)^3$; **6.** $\left(\frac{32}{33}\right)^2$; **7.** $\left(\frac{8}{9}\right)^3$; **8.** (ii) $(0.001)^2$;

9. (iv) 0.000125; **10.** (ii) $\frac{4}{5}$

अभ्यास 2 (d)

1. 1; 2. $\frac{4}{9}$; 3. (iv) 16; 4. (iv) 27; 5. (i) 3, (ii) 1,

(iii) $\frac{1}{9}$, (iv) 1, 6. 216; 7. 1; 8. 1, 9. $\frac{3}{2}$

अभ्यास 2 (e)

1. 6.2×10^{8}; 2. 8.0×10^{-5}; 3. 4.6×10^{9} वर्ष; 4. 1.5×10^{8} किमी; 5. 20; 6. (i) 4.25×10^{6}, (ii) 4.5×10^{-5}, (iii) 2.2×10^{7}; (iv) 2.5×10^{-3}; 7. (i) 25000, (ii) 1750000 (iii) 0.0000000121, (iv) 0.000045, (v) 0.00000023, (vi) 0.00025; 8. 27

दक्षता अभ्यास 2

1. $(-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8)$; 2. -1; 3. 3^{20}; 4. 9^{4}; 5. 1; 6. 2^{24}; 7. $(-2)^{7}$; **8.** $\frac{1}{6}$; **9.** $(4)^{-4}$ या $(-4)^{-4}$; **10.** 3.844×10^{8} मीटर **11.** 9.4605×10^{15} मीटर **12.** 6.4×10^{33}, **13.** 10^{7}, **14.** 2^{7} मिनट, **15.** 2×10^{9}

इकाई : 3 साँख्यिकी

AR349V

- **पाई चार्ट(वृतारेख) की अवधारणा तथा निरूपण**
- **आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृति और उसके प्रकार**
- **समांतर माध्य की गणना (जब बारम्बारता नहीं दी हो)**
- **समान्तर माध्य ज्ञात करना (जब पदों की बारम्बारता दी हो)**

3.1 भूमिका

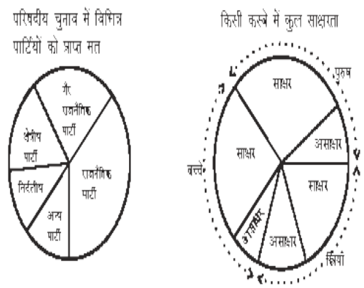
आपने पिछली कक्षा में पढ़ा है कि निश्चित उद्देश्य से जो संख्यात्मक तथ्य एकत्र किए जाते हैं, वे आँकड़े कहलाते हैं।

आपने अव्यवस्थित आँकड़ों को व्यवस्थित करना, बारंबारता सारणी बनाना, अवर्गीकृत आँकड़ों के चित्रीय निरूपण, पिक्टोग्राफ (चित्रारेख) एवं बारग्राफ (दंडारेख) बनाना सीख लिया है। अब इस इकाई में हम लोग अवर्गीकृत आँकड़ों के पाई चार्ट(वृतारेख) की अवधारणा तथा निरूपण, केन्द्रीय प्रवृतियाँ, अवर्गीकृत आँकड़ों का समांतर माध्य तथा साथ ही बारंबारता ज्ञात होने पर समांतर माध्य आदि का अध्ययन करेंगे।

3.2 वृतारेख या पाईग्राफ की अवधारणा तथा निरूपण

आँकड़ों को वृतारेख या पाईग्राफ द्वारा निरूपण भी एक सशक्त माध्यम है। इस प्रकार के प्रदर्शन में आँकड़ों को किसी वृत के त्रिज्य खंडों(sectors) के द्वारा प्रस्तुत किया जाता है।

आपने समाचार पत्रों में वृतीय रूप में निरूपित आँकड़ों को निम्नांकित प्रकार से प्रस्तुत हुए अवश्य देखा होगा।



चित्र3.1

ये निरूपण वृत आरेख(circle graph) कहलाता है। वृत आरेख सम्पूर्ण और उसके भागों में सम्बन्ध दर्शाता है। सम्पूर्ण वृत को त्रिज्य खंडों में विभाजित किया जाता है और प्रत्येक त्रिज्यखंड की माप उसके द्वारा निरूपित सूचना के समानुपाती होती है। वृत आरेख पाई चार्ट (pie chart) भी कहलाता है।

पाशर्वांकित चित्र में एक बच्चे द्वारा एक दिन में विभिन्न क्रिया कलापों में व्यतीत किया गया समय वृतारेख द्वारा दिखाया गया है।

चित्र3.3

प्रस्तुत आरेख में बच्चे द्वारा स्कूल में व्यतीत किये गये समय (घण्टों में) को त्रिज्य खंड का आनुपातिक भाग

$$= \frac{\text{स्कूल में घण्टों की संख्या}}{\text{सम्पूर्ण दिन}}$$

$$= \frac{6 \text{ घण्टे}}{24 \text{घण्टे}} = \frac{1}{4}$$

इसलिए इस त्रिज्य खंड को पूरे वृत का $\frac{1}{4}$ भाग के रूप में खींचा गया है। इसी प्रकार सोने की क्रिया में व्यतीत समय के त्रिज्यखंड का आनुपातिक भाग

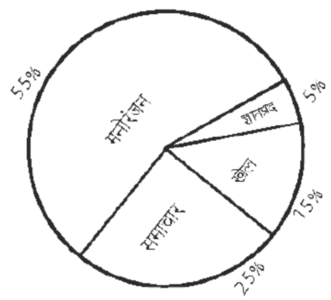
$$= \frac{\text{निद्रा में व्यतीत घण्टों की संख्या}}{\text{सम्पूर्ण दिन}}$$

$$= \frac{8\text{घण्टे}}{24\text{ घण्टे}} = \frac{1}{3}$$

इस त्रिज्य खंड को पूरे वृत का $\frac{1}{3}$ भाग के रूप में दिखाया गया है। इसी प्रकार अन्य त्रिज्य खंडों के माप ज्ञात किए जा सकते हैं।

सभी क्रिया कलापों की भिन्नोको जोड़ने पर आप देखते हैं कि योग एक प्राप्त होता है।

पाशर्वांकित पाई आरेख के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए



चित्र3.4

1.किस प्रकार के कार्यक्रम सबसे अधिक देखे जाते हैं।

2.किस प्रकार के कार्यक्रम सबसे कम देखे जाते हैं।

3.समाचार देखने वाले दर्शकों का प्रतिशत कितना है ?

4.मनोरंजन कार्यक्रम के अतिरिक्त अन्य कार्यक्रम देखने वाले दर्शकों का कुल प्रतिशत कितना है।

इसे कीजिए

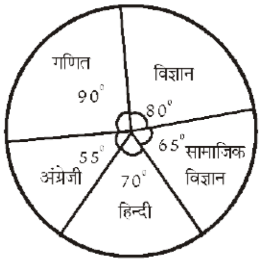
अपनी कक्षा के साथियों से दैनिक जीवन की चर्चा कीजिए। सबकी पसन्द के कार्यक्रमों अथवा खेलों की सूची बना कर वृतारेख खींचिए।

वार्षिक परीक्षा में अलका द्वारा हिन्दी, अंग्रेजी, गणित, विज्ञान और सामाजिक विज्ञान में प्राप्त अंकों को निम्नांकित पाई चार्टद्वारा दर्शाया गया है। यदि अलका ने कुल 540 अंक प्राप्त किए थे तो अiरलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1.अलका ने 105 अंक किस विषय में प्राप्त किए ?

2.अलका को गणित में हिन्दी से कितने अधिक अंक प्राप्त हुए ?

3. जाँच कीजिए कि क्या अंग्रेजी और हिन्दी के प्राप्तांकों का योगफल, विज्ञान और सामाजिक विज्ञान में प्राप्त अंकों के योगफल से कम है या अधिक।



हल -इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए केन्द्रीय कोणों को उनके संगत प्राप्ताकों में परिवर्तित करते हैं।

प्राप्तांकों का योग 540 के लिए केन्द्रीय कोण=360^0

प्राप्तांक 105 के लिए केन्द्रीय कोण= $\frac{360^0}{540}\times105$=$70^0$

हिन्दी को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंडों का केन्द्रीय कोण 70^0है।

अत: अलका को हिन्दी में 105 अंक प्राप्त हुए।

2.गणित और हिन्दी को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंडों के केन्द्रीय कोणों का अन्तर है

$= 90^0 – 70^0 = 20^0$

संगत प्राप्तांकों का अन्तर =$\frac{20}{360}\times540$= 30

अलका को गणित में हिन्दी से 30 अंक अधिक मिले।

3.अंग्रेजी और हिन्दी को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंड के केन्द्रीय कोणों का योगफल

$= 55^0 + 70^0 = 125^0$

विज्ञान और सामाजिक विज्ञान को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंडों के केन्द्रीय कोणों का योगफल

$= 80^0 + 65^0 = 145^0$

चूँकि $145^0 > 125^0$

अत: विज्ञान और सामाजिक विज्ञान में प्राप्त अंकों का योगफल अधिक है।

3.3 वृतारेख या पाईग्राफ खींचना

नीचे दी गई सारणी में कक्षा-6 के बच्चों के स्कूल आने के लिए उपयोग में लाये गये साधनों का विवरण दिया गया है। इसे पाईग्राफ द्वारा निरूपित कीजिए।

साधन	पैदल	साइकिल	रिक्शा	मोटर साइकिल/ स्कूटर	अन्य साधन	योग
शिक्षार्थियों की संख्या	18	10	8	9	15	60

सबसे पहले वृत के केन्द्र पर बने सम्पूर्ण कोण में यातायात के वि भिन्न साधनों को अपनाने वाले शिक्षार्थियों की संख्या के लिए त्रिज्यखंडों के केन्द्रीय कोणों की माप ज्ञात कीजिए -

त्रिज्यखंड के केन्द्रीय कोण की माप $= \frac{\text{विभिन्न साधन अपनाने वाले शिक्षार्थी}}{\text{कुल शिक्षार्थी}} \times 360^0$

अत: सभी शिक्षार्थियों द्वारा अपनाये गये साधनों के लिए केन्द्रीय कोणों की माप की गणना निम्नवत् ढंग से की जा सकती है :

यातायात का साधन	शिक्षार्थियों की संख्या	त्रिज्यखंड का कोण
पैदल	18	$\frac{18}{60} \times 360^\circ = 108^\circ$
साइकिल	10	$\frac{18}{60} \times 360^\circ = 60^\circ$
रिक्शा	8	$\frac{18}{60} \times 360^\circ = 48^\circ$
मोटर साइकिल / स्कूटर	9	$\frac{18}{60} \times 360^\circ = 54^\circ$
अन्य साधन	15	$\frac{18}{60} \times 360^\circ = 90^\circ$
योगफल	60	360°

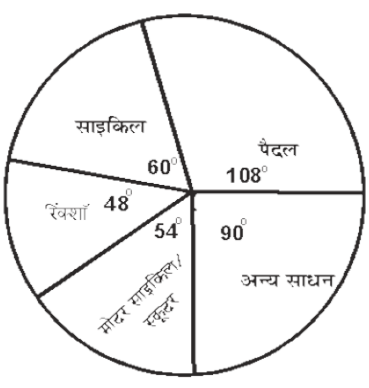
•अब सुविधानुसार कोई त्रिज्या लेकर एक वृत खींचिए।

•पुन: वृत में कोई त्रिज्या खींचकर वृत के आन्तरिक क्षेत्र में चाँदे की सहायता से 108° के केन्द्रीय कोण का त्रिज्य खंड खींचिए।

•इसके पश्चात् क्रमश: 60°, 48°, 54°, तथा 90° के केन्द्रीय कोण के त्रिज्यखंड खींचिए।

•संगत त्रिज्यखंडों में अपनाये गये साधनों के नाम लिखिए।

•चित्र को आकर्षक बनाने के लिए वि भिन्न रंगों से रंग दीजिए।



• निम्नांकित तालिका में किसी परिवार का मासिक बज: प्रस्तुत किया गया है। इसमें महत्वपूर्ण मदों पर किये जाने वाले व्यय का प्रतिशत दिया गया है। आँकड़ों को पाईग्राफ द्वारा प्रर्दिशत कीजिए :

मद	व्यय प्रतिशत	त्रिज्यखंड के कोणों (केन्द्रीय कोणों) की माप
मकान किराया	15	$\frac{15}{100} \times 360° = 54°$
भोजन	45	----
वस्त्र	15	----
शिक्षा	10	----
मिश्रित व्यय	10	----
बचत	5	----
योग	100	360°

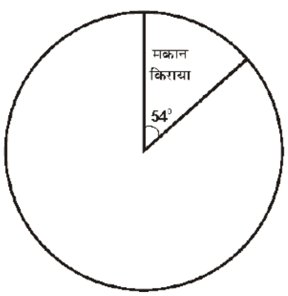
दी गयी सारणी से पाईग्राफ पूरा कीजिए तथा निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए -

•पाईग्राफ द्वारा क्या प्रर्दिशत किया गया है ?

•सबसे बड़ा त्रिज्यखंड किस मद के व्यय के लिए है ?

•शिक्षा, मिश्रित व्यय तथा बचत के केन्द्रीय कोणों की कुल माप कितनी है ?

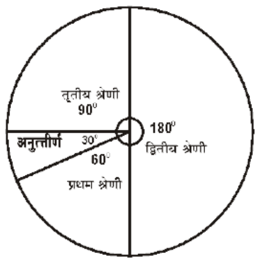
•किन मदों का व्यय समान है ?



अभ्यास 3 (a)

1.किसी कक्षा की वार्षिक परीक्षा के 60 शिक्षार्थियों के परिणाम निम्नांकित पाईग्राफ द्वारा निरूपित हैं-

चित्र देखकर बताइए :



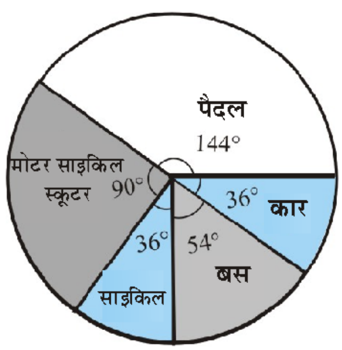
(i)सबसे अधिक शिक्षार्थी किस श्रेणी में उत्तीर्ण हुए ?

(ii)सबसे कम शिक्षार्थी किस श्रेणी में उत्तीर्ण हुए ?

(iii)अनुत्तीर्ण शिक्षार्थियों की संख्या कितनी है ?

(iv)प्रथम श्रेणी और द्वितीय श्रेणी में उत्तीर्ण शिक्षार्थियों की संख्याओं में अनुपात क्या है ?

2.भारत के किसी शहर में तेज गति एवं यातायात नियमों का पालन न करने के कारण विभिन्न साधनों से यात्रा कर रहे सड़क दुर्घ:ना में घायल व्यक्तियों की प्रतिशत दरों का पाईग्राफ निम्नवत् है



पाईग्राफ देखकर निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए -

i.सबसे अधिक घायल होने वाले व्यक्ति किस प्रकार यात्रा कर रहे थे ?

ii.साइकिल से यात्रा करने वाले कितने प्रतिशत व्यक्ति घायल हुए?

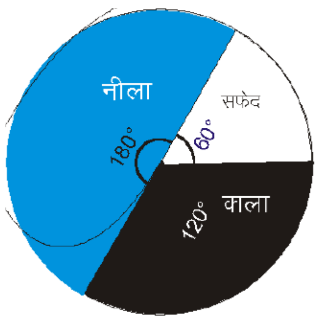
iii.मोटर साइकिल से यात्रा करने वाले कुल कितने प्रतिशत व्यक्ति घायल हुए?

iv.पैदल व कार यात्रियों के घायल होने की प्रतिशतता कितनी है ?

v.विभिन्न यात्रा साधनों से घायल होने वाले व्यक्तियों की कुल प्रतिशतता कितनी है ?

3.पंचायत भवन के प्रांगण में वृताकार क्षेत्र में फूलों के पौधे लगे हैं। इसमें आधे क्षेत्र में गुलाब एक तिहाई क्षेत्र में गेंदा तथा शेष में डहेलिया के पौधे हैं। इसको पाईग्राफ द्वारा प्रर्दिशत कीजिए।

4.किसी समूह में कुल 36 शिक्षार्थी हैं। उनकी पसन्द के गुलाब के रंग के आधार पर पाईग्राफ बनाया गया है। पाईग्राफ देखकर अलग-अलग रंग पसन्द करने वाले शिक्षार्थियों की संख्या दी गयी सारणी में लिखिए।



रंग	नीला	सफेद	काला
केन्द्रीय कोण	180°	60°	120°
शिक्षार्थियों की संख्या			

5. किसी संकुल के 4 विद्यालयों के कक्षा 7 के शिक्षार्थियों की टीमों के लिए गणित क्विज का आयोजन किया गया। उनके द्वारा प्राप्त अंकों के आधार पर पाईग्राफ बनाइये।

विद्यालय :	A	B	C	D
प्राप्त अंक:	20	25	30	15

6 टेलीविजन के विभिन्न ब्राण्डों को क्रय करने वाले ग्राहकों की संख्या निम्नवत् है :

ब्राण्ड	A	B	C	D	E
संख्या	40	20	15	15	10

आँकड़ों को पाईग्राफ द्वारा प्रर्दिशत कीजिए।

3.4 आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृति और प्रकार

प्राय: हम दैनिक जीवन में निम्नांकित प्रकार की बातें सुनते और कहते रहते हैं :

1.कक्षा में शिक्षार्थियों की औसत ऊँचाई 140 सेमी है।

2.फैक्टरी के मजदूरों की औसत मासिक आय 4000 रुपये है।

3.किसी खिलाड़ी द्वारा खेले गये मैचों में रनों का औसत 50 है।

वास्तव में कक्षा के प्रत्येक शिक्षार्थी की ऊँचाई 140 सेमी,.फैक्टरी के प्रत्येक मजदूर की मासिक आय 4000 रुपये और खिलाड़ी द्वारा प्रत्येक मैच में बनाये गये रन 50 नहीं हैं। किसी मैच में खिलाड़ी ने50 रन से अधिक रन बनाए और किसी मैच में 50 से कम रन बनाए। ये सब प्रतिनिधि संख्याएँ हैं जो समूह की न तो न्यूनतम मान वाली संख्याएँ हैं और न तो अधिकतम मान वाली। निश्चित ही ऐसी संख्याएँ अपने समूह के मध्य या उसके आस-पास की संख्याएँ होती हैं।

इस प्रकार हम अनुभव करते हैं कि औसत एक ऐसी संख्या है जो आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृति को दर्शाती है, क्योंकि औसत सबसे अधिक तथा सबसे कम मूल्य के आँकड़ों के बीच में होती है। इसलिए औसत आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृति का मापक है। वि भिन्न प्रकार के आँकड़ों की प्रवृति स्पष्ट करने के लिए वि भिन्न प्रकार के केन्द्रीय मानों (Central Values)की आवश्यकता होती है।

केन्द्रीय प्रवृत्ति से यहाँ अभिप्राय उस संख्यात्मक माप से है जो प्राप्त आंकड़ों का सबसे अधिक प्रतिनिधित्व करता है

केन्द्रीय प्रवृति की मापें मुख्यत: तीन प्रकार की होती हैं :

1. समांतर माध्य (Arithmetic Mean)
2. माध्यिका या माध्यक (Median)
3. बहुलक (Mode)

यहाँ पर हम केवल समांतर माध्य का अध्ययन करेंगे।

3.5 समांतर माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशत: प्रयोग किए जाने वाला प्रतिनिधि मान समांतर माध्य है। इसे अंकगणितीय माध्य भी कहा जाता है। संक्षेप में इसे माध्य (Mean) कहते हैं।

इसे अच्छी प्रकार से समझने के लिए, आइए निम्नलिखित उदाहरण को देखें,

तीन बोरों में क्रमश: 40 किग्रा, 60 किग्रा और 80 किग्रा गेहूँ हैं। यदि तीनों बोरों में बराबर गेहूँ रखा जाय, तो प्रत्येक बोरे में कितना गेहूँ होगा ?

उपरोक्त स्थिति में समांतर माध्य या औसत होगा :

समांतर माध्य = $\frac{\text{गेहूँ की कुल मात्रा}}{\text{बोरों की संख्या}} = \frac{40+60+80}{3}$ किग्रा

$= \frac{180}{3}$

= 60 किग्रा

इस प्रकार प्रत्येक बोरे में 60 किग्रा गेहूँ होगा।

उदाहरण : कक्षा 7 के 6 शिक्षार्थियों के पूर्णांक 100 में से प्राप्तांक निम्नांकित हैं :

85, 73, 90, 64, 86, 70

यहाँ हम देखते हैं कि प्राप्तांकों में न्यूनतम अंक 64 तथा अधिकतम अंक 90 है। उपर्युक्त 6 प्राप्तांकों की कोई प्रतिनिधि संख्या न्यूनतम तथा अधिकतम प्राप्तांकों के बीच की कोई संख्या हो सकती है। इसे ज्ञात करने के लिए इन सभी संख्याओं को जोड़कर संख्याओं की कुल संख्या से भाग दे दिया जाता है। जैसे-

$$\frac{85+73+90+64+86+70}{6} = \frac{468}{6} = 78$$

अत: प्रतिनिधि संख्या 78 है। इसे संख्याओं का औसत अथवा समांतर माध्य कहते हैं।

समांतर माध्य वह मान है जो दिये हुए पदों के योगफल में पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

समांतर माध्य को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जा सकता है।

समांतर माध्य = $\frac{\text{सभी पदों का योगफल}}{\text{पदों की संख्या}}$

3.6 अवर्गीकृत आँकड़ों से समांतर माध्य की गणना (जब बारम्बारता नहीं दी गयी हो)

अवर्गीकृत आँकड़ों से समांतर माध्य ज्ञात करने के लिए सभी पदों के मानों के योगफल में पदों की संख्या से भाग दे देते हैं। यदि पदों का समूह $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ है जिसमें कुल पदों की संख्या ह है, तो

समांतर माध्य $= \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} = \frac{\sum x}{n}$

यहाँ Σ (सिगमा), ग्रीक भाषा का एक अक्षर है जो योगफल का संकेत है।

अर्थात् $\Sigma x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$

उदाहरण 1 : कक्षा 7 के 10 शिक्षार्थियों के भार (किग्रा में) क्रमश: 56, 42, 40, 38, 52, 48, 45, 45, 44 तथा 40 किग्रा हैं। उनके भार का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : समांतर माध्य $= \frac{\text{कुल पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}} = \frac{\sum x}{n}$

$= \frac{56 + 42 + 40 + 38 + 52 + 48 + 45 + 45 + 44 + 40}{10}$ किग्रा

$= \frac{450}{10}$ किग्रा =45 किग्रा

सोचिए चर्चा कीजिए और लिखिए

उपयुक्त उदाहरण में

1. क्या प्राप्त समांतर माध्य प्रत्येक शिक्षार्थी के भार से अधिक है ?

2. क्या प्राप्त समांतर माध्य प्रत्येक शिक्षार्थी के भार से कम है ?

प्रयास कीजिए :

1. 5, 6, 11, 22 का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

2.11 से15 तक की प्राकृतिकसंख्याओं का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

3. यदि 2, 3 और x समान्तर माध्य 3 है, तो x का मान क्या होगा?

3.7 अवर्गीकृत आँकड़ों का समांतर माध्य निकालना (जब पदों की बारम्बारता दी गई हो) :

इस प्रकार के आँकड़ों का समांतर माध्य निकालने के निम्नलिखित सोपान हैं :

I. सबसे पहले प्रत्येक पद में संगत बारम्बारता से गुणा करते हैं।

II. प्राप्त गुणनफलों का योगफल ज्ञात करते हैं।

III. गुणनफलों के योगफल को बारम्बारताओं के योगफल से भाग देते हैं।

यही भागफल अभीष्ट समांतर माध्य है। यदि समूह के पद $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ हैं तथा इनकी बारम्बारता क्रमश: $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ हैं तो

समांतर माध्य $= \dfrac{f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + \ldots. + f_n \times x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$

$= \dfrac{\sum fx}{\sum f}$

उदाहरण 2 : एक कक्षा के 40 शिक्षार्थियों के किग्रा में भार के आँकड़े निम्नवत् हैं :

भार किग्रा (X)	40	41	42	43	44	45
बारम्बारता (f)	8	4	6	10	6	6

कक्षा के शिक्षार्थियों के भारों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

भार किग्रा (X)	बारम्बारता (f)	भार × बारम्बारता ($f \times X$)
40	8	$8 \times 40 = 320$
41	4	$4 \times 41 = 164$
42	6	$6 \times 42 = 252$
43	10	$10 \times 43 = 430$
44	6	$6 \times 44 = 264$
45	6	$8 \times 45 = 270$
योग	$\sum f = 40$	$\sum fx = 1700$

मांतर माध्य== $\dfrac{\sum fx}{\sum f}$

$= \dfrac{1700}{40}$ किग्रा

= 42.50 किग्रा

सामूहिक चर्चा कीजिए :

1. (i).प्रथम पाँच प्राकृतिकसंख्याओं का समांतर माध्य बताइए।

(ii). प्रथम चार सम प्राकृतिकसंख्याओं का समांतर माध्य सम है या विषम ?

(iii). यदि 2, 3 और x का समांतर माध्य 3 है, तो x का मान क्या होगा ?

अभ्यास 3 (b)

1. किसी कक्षा के5 शिक्षार्थियों ने गणित की परीक्षा में क्रमश: 40, 50, 68, 70, 72 अंक प्राप्त किए। शिक्षार्थियों के प्राप्तांकों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

2. किसी फैक्टरी के 15 मजदूरों की प्रतिदिन की मजदूरी क्रमश: 70, 110, 65, 80, 75, 85, 80, 76, 94, 100, 105, 110, 103, 81, 86 रुपये हैं। मजदूरों की मजदूरी का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

3. नीचे दी गई सारणी के आँकड़ों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए :

पद	4	6	8	10	12	14
बारम्बारता	3	4	2	2	6	8

4.

शिक्षार्थियों की ऊँचाई	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	150	152	154	156	158	160
बारम्बारता	3	4	6	8	10	7	6	4	4	2

उपर्युक्त आँकड़ों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

दक्षता अभ्यास - 3

1. किसी परीक्षा में एक कक्षा के 15 शिक्षार्थियों के पूर्णांक 100 में से प्राप्तांक निम्नवत् हैं -

00, 30, 30, 20, 20, 40, 30, 50, 60, 50, 60, 80, 70, 30, 30

प्राप्तांकों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

2. 10 बालिकाओं के भार किग्रा में क्रमश: 40,42,41,38,36,35,42,37,35,35 किग्रा हैं। इनके भारों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित सारणी में 50 शिक्षार्थियों का भार किलोग्राम में दिया हुआ है। उनके भार का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

भार किग्रा	40	42	43	44	45
बारम्बारता (f)	4	12	18	10	6

4. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए :

ऊँचाई(सेमी)	142.5	143.5	144.5	145.5	146.5	147.5
बारम्बारता	8	5	7	7	8	3

5. नीचे दी गई तालिका में किसी क्षेत्र के एक वर्ष में वि भिन्न खाद्यानों में उत्पादन के ऑकड़े दिये गये हैं। ऑकड़ों का पाईग्राफ निरूपण कीजिए-

अनाज/ दाल	मसूर	मटर	चना	गेहूँ	धान
उत्पादन (लाख टन में)	4	4	6	10	12

6. रविवार के दिन किसी बेकरी की दुकान में हुई विभिन्न वस्तुओं की बिक्री (रुपयों में) नीचे दी गई है।

ब्रेड	320
मीठा बिस्कुट	120
नमकीन बिस्कुट	160
पेस्ट्री	80
अन्य	40

केन्द्रीय कोण ज्ञात करके सारणी बनाइए और इस सारणी का प्रयोग करके एक पाईचार्ट खींचिए।

इस इकाई में हमने सीखा

1.वृतारेख या पाईग्राफ निरूपण में सांख्यिकीय आँकड़ों को वृत द्वारा प्रदर्शित करते हैं जिसमें आंकड़ों को त्रिज्य खंड द्वारा निरूपित किया जाता है।

2.केन्द्र पर कोणों की रचना क्रमश: की जाती है।

3.त्रिज्य खंड के केन्द्रीय कोण की माप = $\frac{\text{संगत आँकड़ा}}{\text{कुल आँकड़े}}$ =360^0

4. आँकड़ों में से किसी एक आँकड़े के आस-पास पाये जाने की उनकी प्रवृति को केन्द्रीय प्रवृति कहते हैं।

5.समांतर माध्य वह मान है जो दिए हुए पदों के योगफल में, पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

6.अवर्गीकृत आँकड़ों से समांतर माध्य ज्ञात करना जबकि बारंबारता न दी गई हो

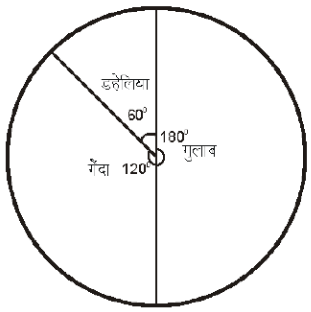
समांतर माध्य $\frac{\sum x}{n}$, जबकि x =आँकड़े तथा n =दिए गए आँकड़ों की संख्या

7.अवर्गीकृत आँकड़ों का समांतर माध्य निकालना, जबकि बारम्बारता दी हुई हो समांतर माध्य = $\frac{\sum fx}{\sum f}$,जहाँ x=आँकड़े तथा f =बारम्बारता

उत्तरमाला

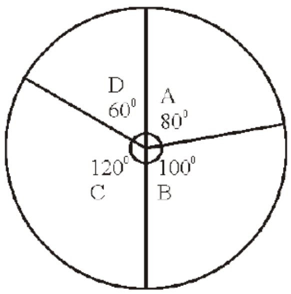
अभ्यास 3 (a)

1. (i) द्वितीय श्रेणी में, (ii) प्रथम श्रेणी में, (iii) 5, (iv) 1 : 3; **2.** I.पैदल, II. 10%, III. 25%, IV. 50, V. 60; **3.**

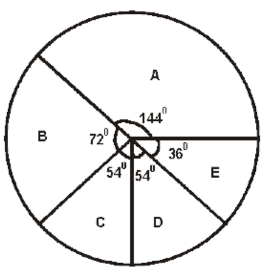


4. नीला रंग-18, सफ़ेद रंग-6, काला रंग-12

5.



6.



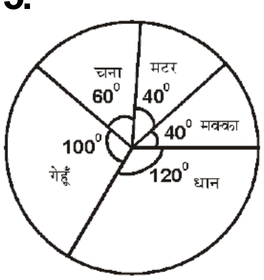
अभ्यास3 (b)

1. 60; **2.** रू. 88; **3.** 10.24; **4.** 151.14 सेमी

दक्षता अभ्यास 3

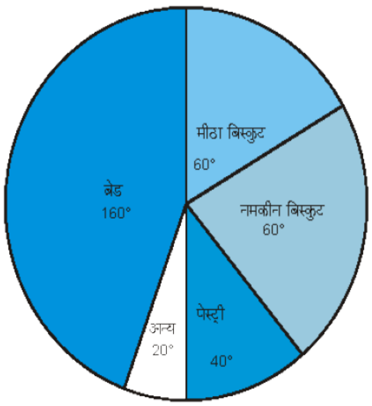
1. 40; **2.** 38.1 किग्रा; **3.** 42.96 किग्रा; **4.** 144.8 सेमी

5.



6.

वस्तु	बिक्री (रुपयों में)	सम्पूर्ण का भाग	केंद्रीय कोण
ब्रेड	320	$\frac{320}{720}$	$\frac{4 \times 360^\circ}{9} = 160^\circ$
मीठा बिस्कुट	120	$\frac{120}{720}$	$\frac{1 \times 360^\circ}{6} = 60^\circ$
नमकीन बिस्कुट	160	$\frac{160}{720}$	$\frac{2 \times 360^\circ}{9} = 80^\circ$
पेस्ट्री	80	$\frac{80}{720}$	$\frac{1 \times 360^\circ}{9} = 40^\circ$
अन्य	40	$\frac{40}{720}$	$\frac{1 \times 360^\circ}{18} = 20^\circ$



इकाई -4 रचनाएँ

ARBZBI

- **पटरी एवं परकार की सहायता से ।**
- **दिए हुए रेखा खंड को समद्विभाजित करना ।**
- **दिए हुए कोण के बराबर कोण की रचना करना ।**
- **दिए हुए कोण को समद्विभाजित करना ।**
- **दी हुई रेखा के समान्तर रेखा खींचना ।**
- **दिए गए रेखा खंड पर दिए गए बिन्दु से लम्ब खींचना, जबकि**

  (a) **बिन्दु रेखा खंड पर स्थित हो ।**

  (b) **बिन्दु रेखा खंड के बाहर हो ।**

भूमिका : -

ज्यामिति पढ़ने का एक महत्वपूर्ण उद्देश्य है कि हम किसी दी हुई सूचना के आधार पर शुद्ध और सही आकृतियों को बना सकते हैं। ये आकृतियाँ रेखाखंड, किरणें, रेखाएँ, त्रिभुज, चतुर्भुज तथा वृत आदि से सम्बन्धित हो सकती है। दैनिक जीवन में भी कभी-कभी ऐसे व्यावहारिक ज्ञान की आवश्यकता पड़ती है। मन्दिर,मस्जिद, गुरुद्वारा तथा बड़े-बड़े भवन-निर्माण आदि में इसकी आवश्यकता होती है। विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी के क्षेत्र में भी इसका महत्वपूर्ण उपयोग होता है।

रेखाखंड, कोण, वृत आदि के अनेक ऐसे उदाहरण मिलते हैं जिनको मात्र मापन के आधार पर छोटे-छोटे भागों में शुद्धता के साथ विभाजित करना सम्भव नहीं

हो पाता है परन्तु ज्यामितीय रचना की विधि से इसको प्रस्तुत कर सकते हैं। पूर्व की कक्षा में कुछ आकृतियों को बनाना हम सीख चुके हैं। इस इकाई में पटरी और परकार की सहायता से कुछ रचनाओं की विधि का अध्ययन करेंगे।

निर्मेय 1

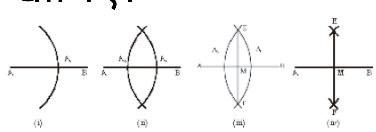
दिए हुए रेखाखंड को समद्विभाजित करना।

ज्ञात है : रेखाखंड AB

रचना करनी है : रेखाखंड ABकी समद्विभाजक रेखा

रचना के चरण :

1. रेखाखंड AB की आधी माप से अधिक त्रिज्या लेकर रेखा खंड के अन्त्य बिन्दु A को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से एक अर्धवृताकार चाप A1 खींचिए।



आकृति 4.1

2.रेखा खंड ABके दूसरे अन्त्य बिन्दु B को केन्द्र मान कर उसी त्रिज्या से एक और अर्धवृताकार चाप A2 खींचिए जो पहले चाप को माना बिन्दुओं E और F पर काटता है।

3.EF को मिलाइए जो ABको मान लीजिए बिन्दु M पर प्रतिच्छेद करती है।

यही बिन्दु M रेखाखंड ABको दो बराबर भागों में विभक्त करता है।

उपरोक्त रचना में EF रेखा निर्धारित करने के लिए E, F की आवश्यकता थी। इन बिन्दुओं को निर्धारित करने के लिए अर्धवृत के स्थान पर छोटे चाप लगाये जा सकते हैं।

इन्हें कीजिए, देखिए तथा निष्कर्ष निकालिए

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक रेखाखण्ड ABखींचकर निर्मेय 1 में दी गई रचना के आधार पर उसे एक बिन्दु M पर समद्विभाजित कीजिए। इस प्रकार

रेखाखंडों AM तथा MB की लम्बाइयाँ माप कर AM तथा MB की समानता की जांच कीजिए।

∠AME तथा ∠BME को मापकर ∠AME तथा ∠BME में संबंध बताइये।

हम पाते हैं कि AM=MB तथा ∠AME=∠BME =90° । इस प्रकार रेखा EF रेखाखंड ABको दो समान भागों में विभाजित करने के साथ-साथ उस पर लंब भी है।

प्राप्त रेखा EF रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक है।

प्रयास कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक वृत खींचिए। वृत की कोई जीवा खींचकर उसका लंब समद्विभाजक खींचिए।

क्या जीवा का लंब समद्विभाजक वृत के केन्द्र से होकर जाता है?

हम पाते हैं कि

वृत की किसी जीवा का लम्ब समद्विभाजक या लम्बार्धक वृत के केन्द्र से होकर जाता है।

अभ्यास 4 (a)

1. 6 सेमी माप के एक रेखाखंड को परकार और पटरी की सहायता से दो बराबर भागों में विभाजित कीजिए।

2. 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त जिसका केन्द्र ध् है, अपनी अभ्यास पुस्तिका पर खींचिए। इसमें दो जीवाएँ AB और CD खींचिए जो आपस में समांतर न हो। इन जीवाओं के लम्ब समद्विभाजक खींचिए। ये दोनों समद्विभाजक किस बिन्दु पर काटेंगे ?

3. 8 सेमी माप के रेखाखण्ड को चार बराबर भागों में बाँटिए।

4. परकार की सहायता से 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर एक जीवा खींचिए। वृत्त के केन्द्र से जीवा के मध्य बिन्दु की दूरी माप कर ज्ञात करिए।

5. 4 सेमी का एक रेखाखंड PQ खींचिए। इसक लम्बाद्र्धक कीजिए जो रेखा PQ को बिन्दु D पर काटे। क्या PD=QD है ? पुन: PD त्रिज्या का एक वृत्त

खींचिए और देखिए क्या यह वृत्त बिन्दु P और Q से होकर जा रहा है।

6. 6.4 सेमी लम्बाई का एक रेखाखंड AB खींचकर उसका सममित अक्ष खींचिए।

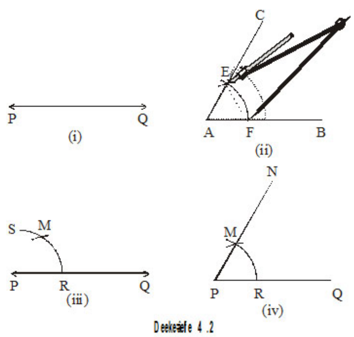
निर्मेय 2

दिए हुए कोण के बराबर कोण की रचना करना।

ज्ञात है : कोण BAC

रचना करनी है : ∠BAC बराबर कोण की। जिसका मान ज्ञात नहीं है।

रचना के चरण :



1. एक रेखाखंड PQ खींचिए।

2. दिए हुए कोण ABC के शीर्ष A को केन्द्र मान कर किसी त्रिज्या को लेकर एक चाप खींचिए जो रेखाखंड ABतथा AC को क्रमश: बिन्दुओं E और F पर काटता है। इसी त्रिज्या या दूरी से P को केन्द्र मान कर एक चाप RS खींचिए।

3. अब परकार में EF दूरी लीजिए।

4. R को केन्द्र मानकर EF दूरी के बराबर एक चाप खींचिए जो पूर्व चाप RS को एक बिन्दु M पर काटता है।

5. PM को मिलाकर किसी बिन्दु N तक बढ़ाइए। यही कोण QPN दिए हुए कोण BAC के बराबर होगा।

सत्यापन :

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए

अपनी उत्तर पुस्तिका पर निर्मेय2 की भांति रचना कीजिए और ∠BAC तथा ∠QPN कोचाँदा की सहायता से मापकर उनके माप लिखिए। क्या ∠BAC तथा

∠QPN के मान बराबर हैं?

हम पाते हैं कि ∠BAC तथा ∠QPN के मान बराबर हैं।

प्रयास कीजिए :

ट्रेसिंग पेपर की सहायता से ∠BAC तथा ∠QPN के मानों की समानता की जांच कीजिए।

निर्मेय 3

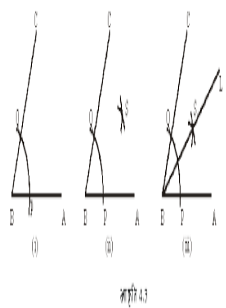
दिए हुए कोण को समद्विभाजित करना।

ज्ञात है : कोण ABC

रचना करनी है : ∠ABC का समद्विभाजन

रचना के चरण :

1. शीर्ष B को केन्द्र मानकर किसी त्रिज्या से एक चाप खींचिए जो भुजा BA को बिन्दु P पर तथा भुजा BC को बिन्दु Q पर काटता है।



2. P और Q को केन्द्र मान कर उसी त्रिज्या या PQ के आधे से अधिक माप की त्रिज्या का चाप खींचिए जो एक दूसरे को एक बिन्दु S पर काटते हैं।
3. बिन्दु B और बिन्दु S को मिला कर L तक बढ़ाइए।

यही रेखाखंड BL, ∠ABC को समद्विभाजित करता है।

इस रेखाखंड को कोण ABC का समद्विभाजक या अर्धक भी कहते हैं।

सत्यापन :

इन्हें कीजिए, देखिए और निष्कर्ष निकालिए।

अपनी उत्तर पुस्तिका पर निर्मेय 3 की भांति किसी कोण ABC की समद्विभाजक रेखाखंड BL खींचिए और ∠ABL तथा ∠CBL की माप चाँदा की सहायता से

ज्ञात कीजिए। क्या ∠ABL और ∠CBL के माप समान हैं?

हम पाते हैं कि ∠ABL और ∠CBL के माप समान है।

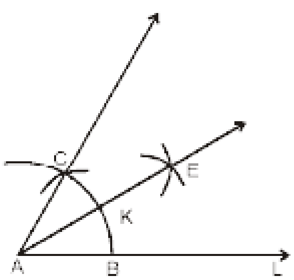
सोचिए

त्रिज्या की लम्बाई आधे से अधिक क्यों ली जाती है।

कोणों की समद्विभाजक रेखा खींचकर छोटे माप के कोण खींचना।

प्रयास कीजिए और निष्कर्ष निकालिए

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक रेखाखंड AL खींचिए। बिन्दु A को केन्द्र मानकर किसी त्रिज्या से एक चाप खींचिए जो रेखाखंड को बिन्दु B पर काटता है। अब B को केन्द्र मानकर उसी त्रिज्या से एक और चाप खींचिए जो पहले चाप को बिन्दु C पर काटता है। AC को मिलाकर बढ़ाइए। ∠CAL कितने अंश का कोण होगा ? हम देखते हैं कि यह 60° का कोण है। अब ∠LAK को समद्विभाजित कीजिए। ∠LAK का मान बताइए।



आकृति 4.4

$<LAK=\frac{1}{2}<BAC=\frac{1}{2}(60^\circ)=30^\circ=CAK$

अत:

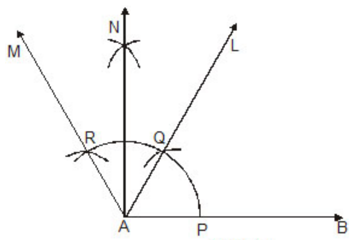
कोणों को समद्विभाजित करके छोटे माप के कोण खींचे जा सकते हैं ।

इन्हें कीजिए, तर्क कीजिए और निष्कर्ष निकालिए

•अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक रेखाखंड ABखींचिए। रेखाखंड AB के बिन्दु A को केन्द्र मान कर किसी त्रिज्या से एक चाप लगाइए जो रेखाखंड ABको P पर काटता है। पुन:

बिन्दु P को केन्द्र मान कर उसी त्रिज्या से चाप PQ तथा Q से चाप QR खींचिए।AQ और AR को मिला कर आगे बढ़ाइए।

∠LAB=60° और ∠MAB=120°



अब ∠QAR को समद्विभाजित कीजिए। ∠QAR की समद्विभाजक रेखाखंड AN को मिलाकर आगे बढ़ाइए।

∠QAN और ∠RAN को मापिए। हम देखते हैं कि प्रत्येक कोण 30° का है।

∠BAN का माप बताइए।

∠BAN= <BAQ + ∠QAN

= 60° + 30°

= 90°

अभ्यास 4 (b)

1. अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक 60° का कोण बना कर पटरी परकार की सहायता से उसे समद्विभाजित कीजिए।
2. कोई कोण PQR खींचिए। एक किरण इस प्रकार खींचिए कि ∠PQS=∠RQS।
3. एक 60° का कोण खींच कर पटरी परकार की सहायता से इसको चार बराबर भागों में विभक्त कीजिए, और नापकर सत्यापित कीजिए।
4. एक समकोण बनाइए तथा उसके समद्विभाजक की रचना कीजिए।
5. अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक ∠PQR बनाइए तथा एक दूसरा कोण इससे छोटा ∠BAC बनाइए। एक ऐसी रेखा QN खींचिए जिससे ∠PQN=∠PQR ∠ABC हो जाय।

निर्मेय 4

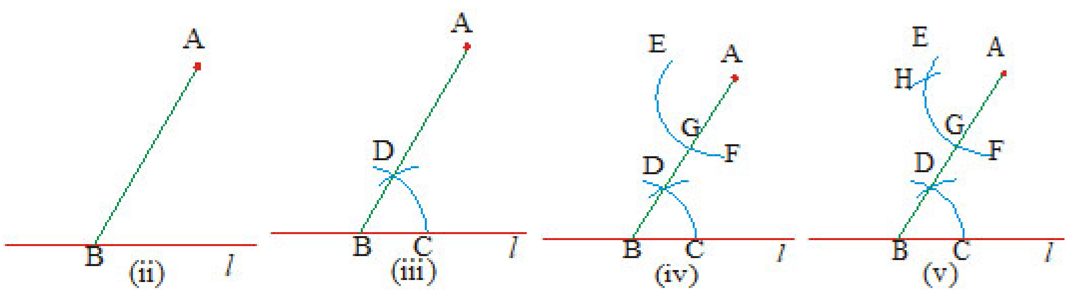
किसी दिए हुए बिन्दु से जाने वाली एक दी हुई रेखा के समांतर रेखा खींचना।

ज्ञात है : एक रेखा l और उसके बाहर बिन्दु A

रचना करनी है : बिन्दु A से जाने वाली रेखा l के समान्तर रेखा की।

रचना के चरण :

1. रेखा l पर बिन्दु B लीजिए। A से l को मिलाइए।
2. बिन्दु B को केन्द्र मानकर कोई त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए जो रेखा l को बिन्दु C तथा रेखाखण्ड BA को बिन्दु D पर काटता है।



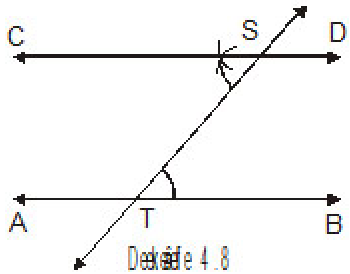
3. बिन्दु A को केन्द्र मानकर चरण 2 वाली त्रिज्या लेकर एक EF खींचिए जो रेखा खण्ड A को बिन्दु G पर काटता है।
4. परकार की सहायता से DCको नापिए तथा G को केन्द्र मानकर DE त्रिज्या का एक लगाया जो चाप GE को बिन्दु H पर काटता है।
5. अब बिन्दु H से बिन्दु A को मिलाती हुई रेखा खींचिए।

    रेखा l तथा रेखा m अभीष्ट समान्तर रेखा हैं।

    नोट : ∠ABC तथा ∠BAH एकान्तर कोण हैं। ∠ABC=∠BAH

प्रयास कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए।

- एक रेखा ABखींचिए जिसके बाहर कोई बिन्दु S स्थित है। बिन्दु S से जाती हुई कोई तिर्यक रेखा ST खींचिए। रेखा ST पूर्व रेखा AB को बिन्दु T पर प्रतिच्छेदित करती है। रेखा ST के बिन्दु S पर ∠STB के बराबर ∠CST की रचना कीजिए।



बिन्दु S से होकर खींची गई रेखा CD रेखा AB के समांतर है। क्यों?

निष्कर्ष : ∠STB = ∠CST (एकांतर कोण)

इसलिए रेखा CB और AB समान्तर रेखा हैं |

अभ्यास 4 (c)

1. अपनी अभ्यास पुस्तिका पर दो समांतर रेखाएँ AB और CD खींचिए। बिन्दुA और C पर क्रमश: 30° और 60° के कोण बनाती हुई रेखाखंड AMऔर रेखाखंड CM बनाइए। ∠AMC का माप ज्ञात कीजिए।
2. पटरी और परकार की सहायता से एक वर्ग की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा 5 सेमी है। विकर्ण की लंबाई को माप कर उसका मान लिखिए।
3. 4 सेमी माप के रेखा खंड ABकेअन्य बिन्दु A पर ∠BAC=60° की रचना कीजिए। बिन्दु B से AC के समांतर रेखा खींचिए।
4. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जब कि BC=4 सेमी, CA=8 सेमी, और AB=6 सेमी। AB के मध्य बिन्दु से BC के समांतर रेखा खींचिए जो AC को बिन्दु M पर काटे। AM तथा CM की लंबाई को मापकर लिखिए। क्या AM=CM है?

निर्मेय 5

दिए गए रेखाखंड पर दिए हुए एक बिन्दु से लम्ब खींचना।

(i) जब बिन्दु रेखाखंड पर स्थित हो।

ज्ञात है : रेखाखंड AB और उस पर स्थित बिन्दु P

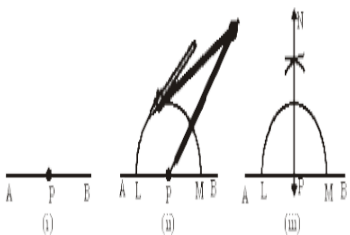
आकृति ४.९

रचना करनी है : बिन्दु P से रेखाखंड AB पर लम्ब की।

रचना के चरण :

1. रेखाखंड ABपर स्थित बिन्दु P को केन्द्र मान कर किसी त्रिज्या से एक चाप खींचिए जो रेखा को L और M बिन्दु पर काटे।
2. बिन्दु L को केन्द्र मानकर LP से बड़ी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए।
3. बिन्दु Mको केन्द्र मानकर उसी त्रिज्या से एक और चाप लगाइए।
4. दोनों चाप एक दूसरे को बिन्दु N पर काटते हैं।
5. बिन्दुओं P, N को मिला कर दोनों ओर बढ़ाइए।

यही रेखा PN दी हुई रेखाखंड ABपर लम्ब होगी।



आकृति 4.10

सत्यापन :

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए।

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर उपर्युक्त की भांति एक रेखाखंड ABपर एक P बिन्दु पर लंब NP खींचिए तथा ∠NPA और ∠NPA की माप ज्ञात करें। क्या PN, रेखा ABपर लम्ब है?।

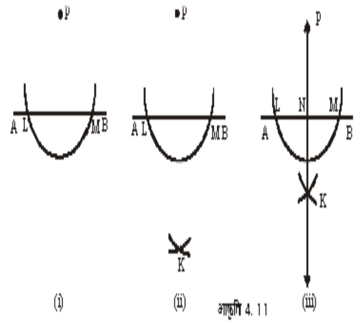
हम पाते हैं कि ∠APN तथा ∠BPN की माप 90° है। इस प्रकार PN, ABपर लम्ब है।

(ii) जब बिन्दु रेखाखंड के बाहर हो।

ज्ञात है : रेखाखंड AB तथा इसके बाहर स्थित कोई बिन्दु P

रचना करनी है : रेखाखंड AB पर P से लम्ब की ।

रचना के चरण :



आकृति 4.11

1. बिन्दु P को केन्द्र मानकर उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो रेखा ABको बिन्दुओं L और M पर काटे।
2. बिन्दुL को केन्द्र मानकरL M के आधे से अधिक दूरी की त्रिज्या ले कर बिन्दु P की विपरीत दिशा में एक चाप लगाइए।
3. बिन्दु M को केन्द्र मानकर समान त्रिज्या से उसी दिशा में एक और चाप लगाइए। दोनों चाप एक दूसरे को K पर काटते हैं।
4. बिन्दुओं P, K को मिलाइए। यह रेखा Pख्, रेखा ABको बिन्दु N पर काटती है।

यही रेखा PN दिए हुए रेखाखंड ABपर लम्ब होगी ।

सत्यापन :

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए।

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर उपर्युक्त की भांति एक रेखाखंड ABपर एक बाह्य बिन्दु P से लंब PN खींचिए और ∠PNA तथा ∠PNBकी माप चाँदे की सहायता से ज्ञात करिए। क्या रेखा PN रेखाखंड ABपर लंब है।

हम पाते हैं कि ∠PNA=∠PNB=90° है। इस प्रकार रेखा PN, रेखाखंड ABपर लम्ब है।

अभ्यास 4 (d)

1. एक रेखाखंड ABखींचिए। इस पर कोई बिन्दु M अंकित कीजिए। M से होकर रेखाखंड ABपर एक लंब पटरी और परकार द्वारा खींचिए।
2. एक रेखाखंड PQ खींचिए। कोई बिन्दु R लीजिए जो रेखा PQ पर न हो। R से होकर रेखा PQ पर एक लंब खींचिए।

3. 5 सेमी का एक रेखाखंड MN खींचिए। रेखाखंड MN पर एक बिन्दु P लेकर, बिन्दु P से रेखाखंड MN पर एक लंब खींचिए।

दक्षता अभ्यास - 4

1. चाँ दा की सहायता से 30° का कोण खींचिए। अब पटरी और परकार की सहायता से इसे समद्विभाजित कीजिए। प्रत्येक कोण को माप कर सत्यापन कीजिए।
2. दो रेखाएँ ABऔर CD खींचिए जो बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित करती हैं। इस प्रकार बने शीर्षाभिमुख कोण COA और कोण BOD को पटरी और परकार की सहायता से समद्विभाजित करके सत्यापित कीजिए कि इनके समद्विभाजक एक ही रेखा में हैं।
3. अपनी अभ्यास पुस्तिका पर कोई दो असमान न्यूनकोण खींचिए। इन कोणों के अन्तर के बराबर एक कोण की रचना कीजिए।
4. पटरी और परकार की सहायता से($7\frac{1}{2}$)° और ($22\frac{1}{2}$)° के कोणों की रचना कीजिए।
5. एक 3 सेमी माप के रेखाखंड ABके सिरे A पर लम्ब AC=3 सेमी खींचिए। बिन्दुओं B, C को मिलाइए। कोणों को मापकर सत्यापित कीजिए कि $\angle ABC = \angle ACB = 45°$
6. एक 5 सेमी माप का रेखाखंड ABखींचिए। बिन्दुओं A और B पर क्रमश: 60° और 120° के कोणों की रचना पटरी और परकार की सहायता से खींचिए। इन कोणों के अर्धक खींचिए। मान लीजिए कि ये बिन्दु C पर मिलते हैं। ∠ACB को नापिए।
7. किसी त्रिज्या का एक वृत खींचिए। इसमें दो जीवा PQऔर QR लीजिए। इन जीवाओं के लम्बार्धक खींचिए। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु C से P, Q और R को मिलाइए। रचना द्वारा सत्यापित कीजिए कि बिन्दु Cवृत का केन्द्र हैं।
8. एक त्रिभुज PQRखींचिए। इनके अन्त: कोणों के समद्विभाजक खींचिए। क्या ये एक A बिन्दु पर मिलते हैं?

9. एक त्रिभुज ABCखींचिए। इनकी भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक खींचिए। क्या ये एक ही बिन्दु पर मिलते हैं?

10. पटरी और परकार की सहायता से 210° के कोण की रचना कीजिए।

(संकेत : 210° = 180°+ $\frac{1}{2} \times 60^{0}$)

11.एक रेखा l खींचिए और उस पर एक बिन्दु X लीजिए। X से होकर, रेखा पर एक लंब रेखाखंड XY खींचिए। अब Y से होकर रेखाखंड XY पर एक लम्ब पटरी और परकार द्वारा खींचिए।

इस इकाई में हमने क्या सीखा

1. हमने पटरी एवं परकार की सहायता से निम्न रचनाओं की विधियों के बारे में अध्ययन किया है।

i) दिए हुए रेखाखंड की लंब समद्विभाजक रेखा खींचना।

ii) दिये हुए कोण के बराबर कोण की रचना करना।

iii) दिए हुए कोण की समद्विभाजक रेखा खींचना।

iv) दी हुई रेखा के समांतर रेखा खींचना।

v) दिए गए रेखाखंड पर दिए गए बिन्दु से लंब खींचना जब कि

(a) बिन्दु रेखाखंड पर स्थित हो।

(b) बिन्दु रेखाखंड के बाहर हो।

2. दी गई रेखा के समांतर रेखा खींचने के लिए हमने निम्न अवधारणा का प्रयोग किया।

i) दो रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेद करने पर यदि उनके एकांतर कोण बराबर हों तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।

ii) दो रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेद करने पर यदि उनके संगत कोण बराबर हों तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।

अभ्यास 4 (a)

2. केन्द्र 0 पर; 3. 6 सेमी 5. हाँ, PA=PB

अभ्यास 4 (c)

1. AMC=90° 2. लगभग 7.1 सेमी

दक्षता अभ्यास 4

6. <ACB=90°

इकाई 5 त्रिभुज

AZBR5N

- **पाइथागोरस प्रमेय की अवधारणा**
- **पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन**
- **पाइथागोरियन त्रिक**
- **भिन्न-भिन्न शर्तों के आधार पर त्रिभुजों की रचना**
- **त्रिभुज के शीर्षलम्ब, लम्ब केन्द्र**
- **त्रिभुज की मध्यिकाएँ एवं केन्द्रक**
- **त्रिभुज के लम्बार्धक एवं परिकेन्द्र**
- **त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक एवं अन्त:केन्द्र**
- **समरूप त्रिभुज के गुणधर्म**
- **दी गयी भुजाओं के अनुपात के आधार पर समरूप त्रिभुजों की रचना।**

भूमिका :

आप पढ़ चुके हैं कि त्रिभुज,तीन रेखाखण्डों से बनी एक सरल बन्द आकृति है। इसमें तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ और तीन कोण होते हैं। त्रिभुजों का वर्गीकरण भुजाओं और कोणों के आधार पर किया गया है। भुजाओं के आधार पर तीन प्रकार के त्रिभुज होते हैं समबाहु, समद्विबाहु और विषमबाहु त्रिभुज। कोणों के आधार पर वर्गीकृत मुख्य तीन त्रिभुज प्रकार के होते हैं, न्यूनकोण, अधिक कोण और समकोण त्रिभुज। इन त्रिभुजों की रचना भी आपने सीखी हैं। समकोण त्रिभुज के प्रगुण भी आप जान चुके हैं। इस इकाई में समकोण त्रिभुज के एक महत्वपूर्ण प्रगुण के बारे में पढ़ेंगे जो पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है।

यूनानी ज्यामिति विशेषज्ञ पाइथागोरस (Pythagoras)570-500 ई0पू0 ने समकोण त्रिभुज से सम्बन्धित एक बहुत उपयोगी और महत्वपूर्ण गुण के बारे में पता लगाया, जिसे पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है । भारतीय गणितज्ञ बौधायन (800 ई0पू0 लगभग) ने समकोण त्रिभुज के इसी प्रमेय का उल्लेख एक आयत के संदर्भ में पाइथागोरस से लगभग 300 वर्ष पूर्व ही किया था। इससे स्पष्ट होता है कि इस प्रमेय का प्रयोग भारतवर्ष में बहुत पहले से होता रहा है किन्तु आज इस प्रमेय को हम जिस रुप में पढ़ते हैं वह यूनान के ज्यामितीय पाइथागोरस के नाम से जाना जाता है।

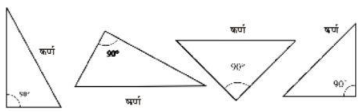
यहाँ हम पाइथागोरस प्रमेय को विस्तार से अध्ययन करेंगे ।

इसे कीजिए :

समकोण त्रिभुज :

निम्नांकित त्रिभुजों को देखिए। कोणों के आधार पर ये किस प्रकार के त्रिभुज हैं ? समकोण की सम्मुख भुजा और शेष दो भुजाओं को नापिए और बताइए कि इनमें सबसे बड़ी भुजा कौन है?

हमने देखा कि समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने की भुजा सबसे बड़ी है। इस भुजा को कर्ण कहते हैं।

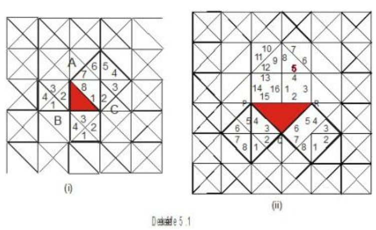


समकोण त्रिभुज में समकोण की सम्मु(ख) भुजा को कर्ण कहते हैं। यह समकोण बनाने वाली दोनों भुजाओं से बड़ी होती है ।

इसे कीजिए :

5.2पाइथागोरस प्रमेय की अवधारणा

आकृति 5.1 (i) और (ii) में बने दोनों छायांकित समकोण त्रिभुजों ABCऔर PQR को देखिए। दोनों त्रिभुजों की सभी भुजाओं पर बाहर की ओर वर्ग बने हैं। ये सभी वर्ग समान प्रकार के छोटे-छोटे सर्वांगसम त्रिभुजों से ढके हैं।

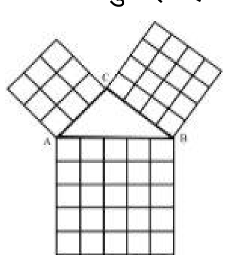


आकृति 5.1(i) और (ii)

Δ ABCके कर्ण ACपर बने वर्ग के छोटे-छोटे त्रिभुजों की संख्या कितनी हैं ? समकोण बनाने वाली भुजाओं ABतथा BCपर बने वर्गों में छोटे-छोटे त्रिभुजों की संख्या का योग कितना है ?

हम देखते हैं कि समकोण ABC के कर्ण AC पर बने वर्ग में छोटे-छोटे त्रिभुजों की संख्या 8 है और समकोण बनाने वाली भुजाओं ABतथा BCपर बने वर्गों में त्रिभुजों की संख्याओं का योग 4+4=8 के बराबर है।

इसी प्रकार ΔPQR में कर्ण PR पर बने वर्ग में 16 त्रिभुज तथा समकोण बनाने वाली भुजाओं QR तथा PQ पर बने वर्गों में 8-8 त्रिभुज हैं। इनका योग कर्ण PR पर बने वर्ग1 6त्रिभुजों के बराबर है इसकी जांच कीजिए।



आकृति 5.2

प्रयोग 1

एक समकोण त्रिभुज ABCबनाइए, जिसमें $\angle BCA$ समकोण हो और BC=4 मात्रक तथा CA =3 मात्रक हों। नापने पर कर्ण AB=5 मात्रक। AB, BCऔर CA पर बाहर की ओर वर्ग खींचिए। इनमें से प्रत्येक वर्ग को एकांक वर्गों में विभाजित कीजिए, जैसा निम्नांकित चित्र में प्रदर्शित है।

हम जानते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल=भुजा^{2}

$\therefore$ ABपर बने वर्ग का क्षेत्रफल =5^2 वर्ग मात्रक

=25 वर्ग मात्रक

BCपर बने वर्ग का क्षेत्रफल=4^2 वर्ग मात्रक

=16 वर्ग मात्रक

CA पर बने वर्ग का क्षेत्रफल=3^2 वर्ग मात्रक

=9 वर्ग मात्रक

BCऔर CA पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों का योग =(16 + 9) वर्ग मात्रक

=25 वर्ग मात्रक

हम देखते हैं कि कर्ण ABपर बने वर्ग का क्षेत्रफल 25 वर्ग मात्रक तथा शेष दोनों भुजाओं BCऔर CA पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योगफल 25 वर्ग मात्रक के बराबर है।

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर हम कह सकते हैं कि :

किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

इस कथन को पाइथागोरस प्रमेय कहते हैं।

उपर्युक्त प्रमेय का कथन निम्नलिखित रूप में भी किया जाता है :

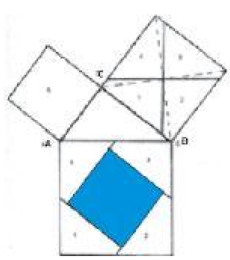
समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है ।

अथवा

$a^2 + b^2 = c^2$, **जहाँ c समकोण त्रिभुज का कर्ण तथा a और b उसकी शेष भुजाओं की मापें हैं ।**

प्रयोग 1- पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन (कट तथा पेस्टविधि से)

एक मोटे कागज पर एक समकोण त्रिभुज ABCकी रचना, जिसका $\angle BCA$ समकोण हो और उसकी तीनों भुजाओं पर बाहर की ओर वर्गों की रचना कीजिए। अब BCपर बने वर्ग का केन्द्रीय बिन्दु वह बिन्दु जहाँ पर उसके विकर्ण एक दूसरे को काटते हैं। ज्ञात कीजिए। इस बिन्दु से त्रिभुज के कर्ण ABके समान्तर तथा उस पर इसी बिन्दु से होकर लम्ब रेखाएँ खींचिए। अब वर्ग को इन रेखाओं की सीध में काट कर उन पर 1, 2, 3 और 4 लिख दीजिए। इन चार टुकड़ों और CA पर बने वर्ग 5 को काटकर ABपर बने वर्ग पर चित्रानुसार इस प्रकार रखिए कि



आकृति 5.3

आकृति 5.3 के समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बने वर्ग के शीर्षों पर समायोजित हो जायें। शेष भाग ACके वर्ग 5 से ढक जायेगा।

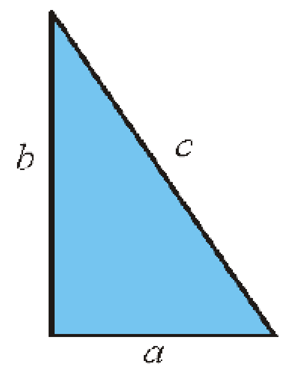
अब चित्र से पूर्णत: स्पष्ट है कि वर्ग BCके चार टुकड़े तथा CA पर बना वर्ग, कर्ण ABपर बने वर्ग को पूरा-पूरा ढक लेते हैं। इससे पाइथागोरस प्रमेय की सत्यता प्रमाणित होती है।

सम्बन्ध $c^2 = a^2 + b^2$ से स्पष्ट है कि $c^2 > a^2$ तथा $c^2 > b^2$, अत: $c > a$ तथा $c > b$. इस प्रकार किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है।

प्रयोग - 2

एक मोटा रंगीन कागज ले कर किसी भी माप का एक समकोण त्रिभुज बनाइए। अब इसी के चार प्रतिरूप बनाइए।

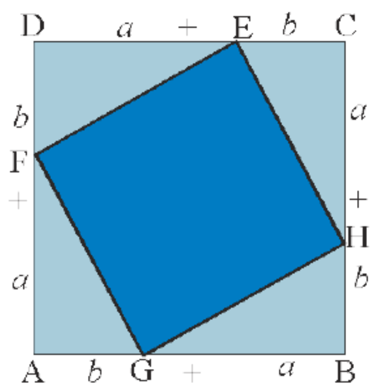
उदाहरण के लिए एक समकोण त्रिभुज लेते हैं। आधार भुजा की लम्बाई a इकाई, दूसरी भुजा की लम्बाई b इकाई और कर्ण की लम्बाई c इकाई है। कर्ण की लम्बाई c इकाई की नाप के बराबर भुजा का एक वर्ग बनाइए। किसी अन्य एक कागज पर (a + b) इकाई लम्बाई के भुजा के वर्ग की किसी अन्य रंग की आकृति बनाइए।



आकृति 5.4 9

अब अपने बनाए हुए 4 त्रिभुजों को (a + b)भुजा के वर्ग के साथ आकृति5.5 के अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

(a + b)भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल



=4 ² समकोण का क्षेत्रफल (जिसकी भुजाएँ a और b हैं)+c लम्बाई भुजा का वर्ग

$$\& \ (a+b)^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2} a \times b\right) + c^2$$

$(a + b)^2 = 2a\,b + c^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

उपरोक्त दोनों प्रयोगों के आधार पर कहा जा सकता है।

किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल शेष दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योगफल के बराबर होता है

बौधायन

बौधायन के जन्मस्थान, माता पिता परिवार की जानकारी उपलब्ध नहीं है। इतिहासकार इनका काल ईसा पूर्व लगभग ८०० वर्ष मानते हैं। सर्वप्रथम इन्होंने वौधायन शुल्व सूत्र का उद्धरण दिया जिसे आज पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है। यह सूत्र निम्न है -

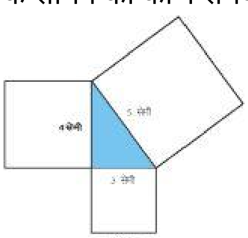
दीर्घ चतुरश्र (आयत) की अन्कया रज्जु (कर्ण) पर बना वर्ग पाश्र्वमानी (आधार) तथा तिर्यङ्मानी (लम्ब) पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

5• 2• 2 पाइथागोरस प्रमेय का विलोम :

इसे कीजिए :

प्रयोग संख्या -3

3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी लम्बी भुजाओं के तीन वर्ग कागज से काटिए । एक कागज के ऊपर इन तीनों वर्गों के तीन शीर्षों को मिलाते हुए आकृति 2.7 के अनुसार इस प्रकार रखिए कि उनकी भुजाओं से एक त्रिभुज बन जाये । इस प्रकार बने त्रिभुज को कागज पर चिन्हित कीजिए। इस त्रिभुज के कोणों को मापिए । आप देखेंगे कि इनमें केवल 5 सेमी भुजा के सामने का कोण समकोण है।



आकृति 5.7

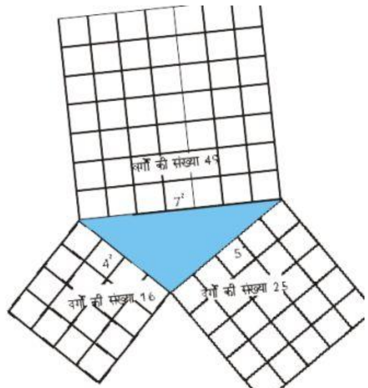
ध्यान दीजिए कि यहाँ

$3^2 + 4^2 = 5^2$, $4^2 + 5^2 \neq 3^2$ तथा

$3^2 + 5^2 \neq 4^2$.

प्रयोग संख्या -4

उपर्युक्त प्रक्रिया को 4सेमी., 5 सेमी तथा 7सेमी भुजाओं वाले तीन वर्ग लेकर फिर दोहराइए । इस बार आप को अधिक कोण त्रिभुज प्राप्त होगा । यहाँ भी ध्यान दीजिए कि



आकृति 5.8

$4^2 + 5^2 \neq 7^2$, $7^2 + 5^2 \neq 4^2$ तथा

$4^2 + 7^2 \neq 5^2$

$16 + 25 \neq 49$, $49 + 25 \neq 16$

$16 + 49 \neq 25$

$41 \neq 49$, $71 \neq 16$

$65 \neq 25$

इस प्रक्रिया से पता चलता है कि पाइथागोरस प्रमेय केवल तभी लागू होता है जब, त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज होगा।

अत:

यदि किसी त्रिभुज पर पाइथागोरस प्रमेय प्रयुक्त होता है, तो वह समकोण त्रिभुज होगा।

इसी प्रकार 5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी भुजाओं वाले तीन वर्ग लेकर पूर्व प्रक्रिया दोहराने से प्राप्त त्रिभुज में पाइथागोरस प्रमेय सिद्ध होता है या नहीं। जाँच कीजिए।

इसे भी कीजिए :

1. एक त्रिभुज ABCखींचिए जिसमें AB=5सेमी, BC=3 सेमी तथा CA =4 सेमी हो।

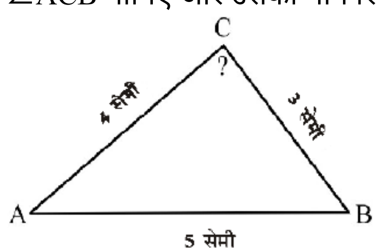
हम देखते हैं कि :

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$25 = 9 + 16$

$= 25$

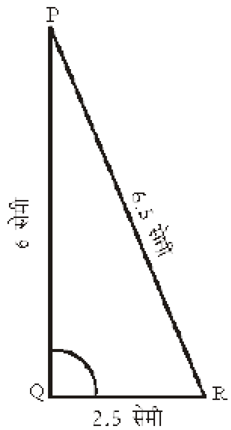
$\angle ACB$ मापिए और उसकी माप रिक्त स्थान में लिखिए।



आकृति 5.9

$\angle ACB$ .....

II. Δ PQR की रचना कीजिए, जिसमें PQ= 6 सेमी,QR=2.5 सेमी औरPR=6.5सेमी हो। यहाँ $(2.5)^2 + 6^2 = (6.5)^2$ है।

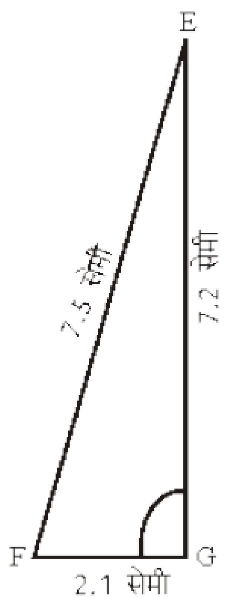


आकृति 5.10

$\angle$PQR को नापिए और नाप को रिक्त स्थान पर लिखिए :

$\angle PQR$ = ...

III.पुन: यही प्रयोग त्रिभुज EFG के साथ कीजिए, जिसमें FG= 2.1 सेमी, EG=7.2 सेमी और FE=7.5 सेमी हो।



आकृति 5.11

यहाँ $(2.1)^2 + (7.2)^2 = (7.5)^2$

यहाँ EGF को नापिए और नाप को रिक्त स्थान में लिखिए :

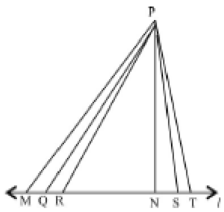
$\angle EGF$ = ...

हमने देखा कि प्रत्येक स्थिति में त्रिभुज का एक कोण 90° है।

निष्कर्ष :

यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा पर बना वर्ग, शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर हो, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है। यही प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय का विलोम है।

किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण, अन्य दो भुजाओं में से प्रत्येक से बड़ा होता है।



इसे भी कीजिए :

- **रेखा l के बाहर कोई बिन्दु P लीजिए।**

P से रेखा l पर लम्ब PN खींचिए।

P से इस लम्ब के अतिरिक्त अन्य रेखाखंड PR,PQ,PM,PS खींचिए। इन सब रेखाखंडों को नाप कर बताइए कि कौन रेखाखंड सबसे छोटा है।

हम देखते हैं कि PN सबसे छोटा रेखाखंड है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि :

किसी रेखा के बाहर दिये हुए किसी बिन्दु से जो भी रेखाखंड इस रेखा तक खींचे जा सकते हैं, उनमें लम्ब सबसे छोटा होता है।

5.3 पाइथागोरियन त्रिक (Pythagorean Triplets)

यदि किसी समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं की लम्बाई 2n और n^2-1 हैं और कर्ण की लम्बाई n^2+1 है तो

$(2n)^2 + (n^2-1) = (n^2+1)^2$ जबकि $n > 1$

अत: $2n$, $n^2 - 1$, $n^2 + 1$ को पाइथागोरियन त्रिक कहते हैं।

निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

भुजा n	BC n^2-1	AB 2n	AC n^2+1	$AC^2=BC^2+AB^2$ ----
2	3	4	5	----
3	8	6	10	----
4	15	8	17	----
5	24	10	26	----

उदाहरण : दिखाइए कि 8, 9 और 12 पाइथागोरियन त्रिक नहीं हैं।

हल : $8^2 = 64$

$9^2 = 81$

$8^2 + 9^2 = 64 + 81$

$= 145$ .... (1)

तथा $12^2 = 144$ .... (2), (1) और (2) की तुलना द्वारा, $8^2 + 9^2 \neq 12^2$

अत: 8, 9 और 12 पाइथागोरियन त्रिक नहीं हैं।

पाइथागोरियन त्रिक ज्ञात करने की विधि :

पाइथागोरियन त्रिक 3, 4, 5 लीजिए।

यहाँ $5^2 = 3^2 + 4^2$

या $25 = 9 + 16 = 25$

(3, 4, 5) को 2 से गुणा कीजिए,

3 x 2, 4 x 2, 5 x 2 अर्थात् 6, 8, 10

6, 8, 10 पाइथागोरियन त्रिक हैं।

जाँच कीजिए।

हल : $10^2 = 6^2 + 8^2$

$100 = 36 + 64 = 100$

अत:

यदि (a,b,c) पाइथागोरियन त्रिक हैं तथा k एक धन पूर्णांक है, तो ak, bk औरck भी पाइथागोरियन त्रिक हैं।

समकोण त्रिभुज का कर्ण ज्ञात करना

उदाहरण 1: उस समकोण त्रिभुज का कर्ण ज्ञात कीजिए जिसकी अन्य दो भुजाएँ 8 सेमी और 15 सेमी हैं।

हल : मान लीजिए कि समकोण त्रिभुज का कर्ण a सेमी है।

पाइथागोरस प्रमेय से

$a^2 = 8^2 + 15^2$

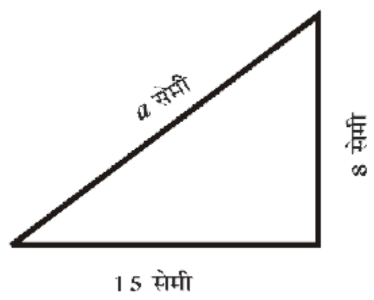
या, $a^2 = 64 + 225$

या, $a^2 = 289$

या, $a^2 = 17^2$

$\therefore a = 17$

$\therefore$ कर्ण की लम्बाई 17 सेमी होगी।



आकृति 5.13

•समकोण त्रिभुज में कर्ण के अतिरिक्त अन्य दो भुजाओं में से एक भुजा ज्ञात करना :

उदाहरण 2. आकृति 2.14 में अज्ञात भुजा y की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

आकृति 5.14

हल : पाइथागोरस प्रमेय से

$y^2 + 12^2 = 13^2$

या, $y^2 + 144 = 169$

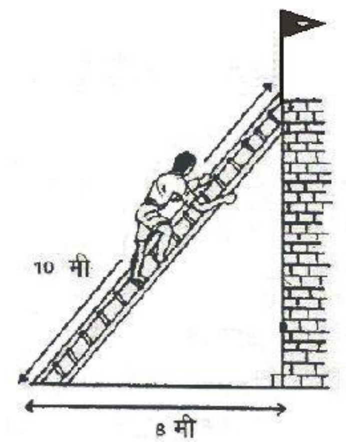
या, $y^2 = 169 - 144$

या, $y^2 = 25$

या, $y = 5$

अत: अज्ञात भुजा की लम्बाई 5 मात्रक होगी।

उदाहरण 3: 10 मीटर लम्बी सीढ़ी एक दीवार से 8 मीटर दूरी पर लगायी गयी है। इस दीवार पर सीढ़ी कितनी ऊँचाई तक पहुँचेगी ?



आकृति 5.15

हल : मान लीजिए कि सीढ़ी दीवार पर h मी ऊँचाई तक पहुँची।

पाइथागोरस प्रमेय से,

$10^2 = 8^2 + h^2$

$\therefore h^2 = 10^2 - 8^2$

$= 100 - 64$

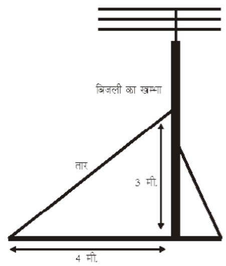
$h^2 = 36$

या, $h^2 = 6^2$

या, $h = 6$

अत: सीढ़ी 6 मीटर ऊँचाई तक दीवार पर पहुँचेगी ।

उदाहरण 4: बिजली के खम्भे को सहारा देने वाले तार की लम्बाई आकृति 5.16 की सहायता से ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.16

हल : मान लीजिए कि तार की लम्बाई x मीटर है।

चूँकि चित्र में समकोण त्रिभुज बनेगा। अत: पाइथागोरस प्रमेय से,

$x^2 = 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9$

या, $x^2 = 25$

या, $x = 5$

$\therefore x = 5$

अत: तार की लम्बाई 5 मीटर है।

उदाहरण 5:प्रकाश स्तम्भ एक वृक्ष भूमि से 12 मी की ऊँचाई से टूटा, परन्तु दो टुकड़े अलग नहीं हुए। जिस स्थान पर स्तम्भ की चोटी ने भूमि को छुआ, वह वृक्ष के आधार से 5 मी दूर है। टूटने के पहले स्तम्भ कितना ऊँचा था ?

आकृति5.17

हल : मान लीजिए कि स्तम्भ का x मी भाग टूटा। टूटने के बाद उसका 12 मी भाग बचा रहा।

उसका ऊपरी सिरा स्तम्भ के पास से 5 मी दूर भूमि से स्पर्श कर रहा है। इसको हम आकृति ABCसे प्रर्दिशत कर सकते हैं। $\angle C$ समकोण है।

अत: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25$

$AB^2 = 169$

$AB^2 = 13^2$

$\therefore AB = 13$

$AB = x = 13$

आकृति का B A भाग ही टूट कर गिरा है और समकोण ABCमें $AB = x$ के रूप में कर्ण को व्यक्त कर रहा है। अत: टूटने से पहले प्रकाश स्तम्भ की पूरी ऊँचाई = 12 मी + x मी

= 12 मी + 13 मी = 25 मी

प्रयास कीजिए :

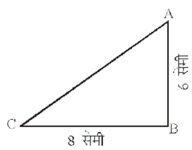
1.निम्नलिखित नाप के त्रिभुजों में कौन त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

(i) 5 सेमी, 4 सेमी, 3 सेमी

(ii) 6 सेमी, 8 सेमी, 7 सेमी

अभ्यास5(a)

1. आकृति5.18 में, ∠B समकोण है, भुजा CA की माप होगी -

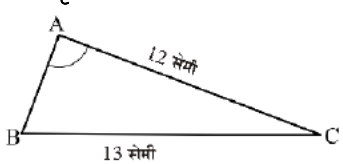


आकृति 5.18

(i) 5 सेमी **(ii)** 10 सेमी

(iii) 8 सेमी **(iv)** 6सेमी

2.आकृति 5.19में ∠A समकोण हो, तो AB की माप होगी -

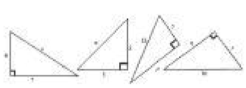


आकृति 5.19

(i) 25 सेमी **(ii)** 13 सेमी

(iii) 5 सेमी **(iv)** 12 सेमी

3. निम्नलिखित आकृतियों में समकोण त्रिभुजों को देखकर अपनी अभ्यास पुस्तिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



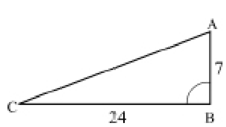
(i) **(ii)** **(iii)** **(iv)**

आकृति 5.19

(i) $4^2 + 7^2 = ...$ **(ii)** $5^2 + ... = d^2$

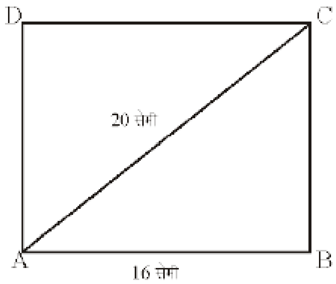
(iii) $13^2 - 7^2 = ...$ **(iv)** $y^2 = 10^2 - ....$

4. ΔABC में ∠ABC समकोण है। यदि AB=7 सेमी और bc=24 सेमी, तो CA की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.20

5. आयत ABCD में विकर्ण CA=20 सेमी और AB=16 सेमी। BC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.21

6. 65 डेसीमी लम्बी सीढ़ी को दीवार से 25 डेसीमी हटाकर लगाया गया है, दीवार के आधार से सीढ़ी के ऊपरी सिरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

7.26 मीटर लम्बा एक तार है। उसका एक सिरा 24 मीटर ऊँचे खम्भे के ऊपरी सिरे से बंधा है और दूसरा सिरा जमीन में गड़ा है। जमीन पर खम्भे और तार के निचले सिरे के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

8.निम्नलिखित पाइथागोरियन त्रिक हैं। प्रत्येक से तीन-तीन पाइथागोरियन त्रिक बनाइए :

(i) 3, 4, 5 **(ii)** 5, 12, 13 **(iii)** 8, 15, 17

9. निम्नलिखित में पाइथागोरियन त्रिक छाँट कर लिखिए :

(i) 5, 12, 13 **(ii)** 7, 8, 15 **(iii)** 6, 7, 8

(iv) 8, 15, 17 **(v)** 3, 4, 5

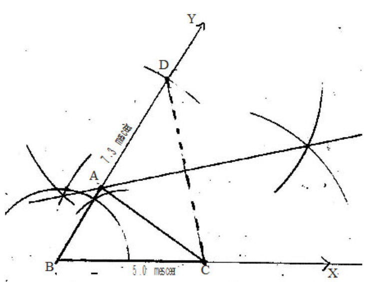
10. सत्यापन कीजिए यदि कोई n विषम संख्या है तो n, $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n^2+1}{2}$ पाइथागोरियन त्रिक हैं।

5.4 त्रिभुजों की रचना

5.4.1 त्रिभुज की रचना करना जबकि त्रिभुज का आधार, आधार का एक कोण एवं अन्य दो भुजाओं का योगफल ज्ञात हो।

उदाहरण - त्रिभुज ABC की रचना करना जिसकी भुजा BC=5 सेमी, $\angle B=60°$ तथा CA+AB=7.3सेमी है |

रचना के चरण -



किरण BX खींचिए, इसमें से BC=5सेमी का रेखाखण्ड लीजिए।

बिन्दु B पर 60 का कोण बनाती हुई किरर्ण BX खींचिए।

BY से BD = 7.3 सेमी का रेखाखण्ड लीजिए। DC को मिलाइए।

DC का लम्बसमद्विभाजक खींचिए जो BD को बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करता है।

AC को मिलाइए।

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

5.4.2 त्रिभुज की रचना करना जबकि त्रिभुज का आधार, आधार का एक कोण एवं अन्य दो भुजाओं का अंतर ज्ञात हो।

उदाहरण: त्रिभुज ABC की रचना करना जिसकी भुजा BC = 5.5 सेमी, कोण B=30 तथा AB - CA=3.5सेमी

रचना के चरण

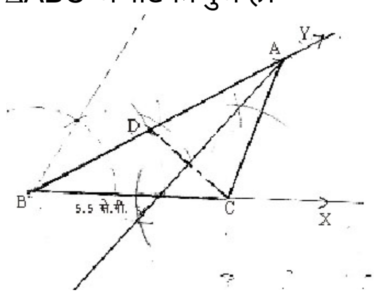
किरण BX खींचिए इसमें सेBC=5.5 सेमी का रेखाखंड लीजिये |

बिंदु B पर 30° कोण बनाते हुए BY किरण खीचिये

BY से AB-CA=3.5 सेमी का रेखाखंड BD लीजिये

CD को मिलाइये तथा CD का लम्बार्धक खींचिए जो BY को बिंदुA पर काटता है CAको मिलाइए

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



अभ्यास 5(b)

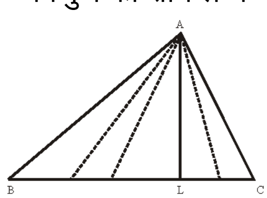
1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिये जिसकी भुजा 6 सेमी कोण B=50° तथा CA+AB=8सेमी
2. त्रिभुज ABC की रचना कीजिये जिसकी भुजा BC=7.5 सेमी कोण B=45° तथा AB-CA=2.0 सेमी
3. त्रिभुज ABC की रचना कीजिये जिसकी भुजा BC=5.0 सेमी कोण B=50° तथाAC-AB=2.0 सेमी

5.5.1 त्रिभुज के शीर्ष लम्ब

त्रिभुज ABC में शीर्ष A से BC तक अनेक रेखाखंड खींचे जा सकते हैं। नीचे दी गई आकृति 5.22 में इन रेखाखंडों को देखिए।ध्यान दीजिए, इनमें से कौन सा रेखाखंड त्रिभुज की ऊँचाई को प्रदर्शित करता है ?

रेखाखंड AL त्रिभुज की ऊँचाई है।

वह रेखा खंड जो शीर्ष A से सीधा उध्र्वाधर नीचे BCतक और उस पर लम्बवत् होता है, त्रिभुज की ऊँचाई होती है । इसे त्रिभुज का शीर्ष लम्ब भी कहते है।



आकृति 5.22

रेखा खंड AL त्रिभुज का एक शीर्ष लम्ब है । शीर्ष लम्ब का एक अन्त्य बिन्दु, त्रिभुज के शीर्ष पर और दूसरा अन्त्य बिन्दु सम्मुख भुजा बनाने वाली रेखा पर स्थित जिस बिन्दु पर लम्ब होता है वही बिन्दु है। प्रत्येक शीर्ष से एक शीर्ष

लम्ब खींचा जा सकता है ।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

(i) एक त्रिभुज में कितने शीर्ष हो सकते हैं ?

(ii) क्या आप कोई ऐसा त्रिभुज सोच सकते हैं; जिसके दो शीर्ष लम्ब उसकी दो भुजाएँ ही हों ।

(iii) क्या एक शीर्ष लम्ब पूर्णतया त्रिभुज के अभ्यन्तर में सदैव स्थित होगा?

संकेत : प्रश्न(ii) और (iii) के लिए प्रत्येक प्रकार के त्रिभुज खींचकर ज्ञात कीजिए ।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

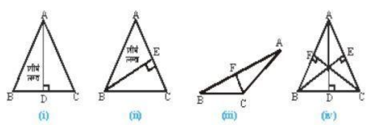
1. ΔPQR में कोण P एक समकोण है। इसकी सबसे लम्बी भुजा कौन-सी है ।

2. किसी समकोण त्रिभुज में सबसे लम्बी भुजा कौन-सी होती है ।

इन्हें देखिए :

निम्नलिखित आकृति 5.23 में (i), (ii) और (iii) को देखिए।

चित्र (i) में ΔABCके शीर्ष A से भुजा BCपर लम्ब AD, चित्र (ii) में ΔABCके शीर्ष B से भुजा ACपर लम्ब BE और चित्र (iii) में ΔABCके शीर्ष Cसे भुजा ABपर लम्ब CF खींचा गया है।



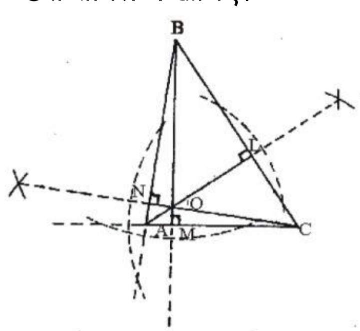
आकृति5.23

रेखा खण्ड AD, BE और CF, ΔABCके शीर्ष लम्ब हैं।

आकृति 2.23 (iv) में त्रिभुज ABCके कितने शीर्षलम्ब हैं ? हमने देखा त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब हैं, जो एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।

किसी त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाले गये लम्ब रेखा खण्डको त्रिभुज का शीर्षलम्ब (Altitude) कहते हैं। त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब होते हैं।

प्रयोग 1: एक त्रिभुज ABCबनाइए, जिसकी भुजाएँ, 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी हों। इस त्रिभुज के शीर्ष A, B और Cसे शीर्षलम्ब खींचिए।



आकृति 5.24

रचना के चरण निम्नलिखित हैं-

1. दी हुई भुजाओं की माप से Δ ABCबनाइए।

2. शीर्ष A से AL ⊥ BCखींचिए।

3. शीर्ष B से BM ⊥ ACखींचिए।

4. शीर्ष Cसे CN ⊥ ABखींचिए।

क्या तीनों शीर्षलम्ब एक ही बिन्दु 0 से होकर जा रहे हैं ?

हम देखते हैं कि ΔABCके तीनों शीर्षलम्ब AL, BM और CN एक ही बिन्दु 0 से होकर जा रहे हैं।

प्रयोग 2:एक त्रिभुज ABCखींचिए जिसकी भुजाएँ 7 सेमी, 6 सेमी और 5 सेमी हैं। इस त्रिभुज के शीर्ष B और Cसे शीर्षलम्ब खीचिए। रचना के चरण निम्नलिखित हैं।

1. दी हुई भुजाओं के अनुसार ΔABCखीचिए।

2. B से ACपर लम्ब BM खीचिए।

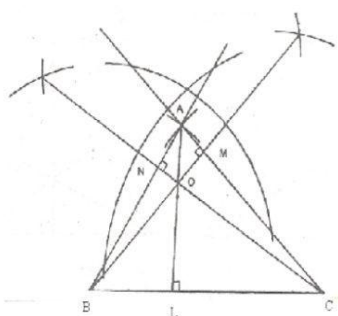
3. Cसे ABपर लम्ब CN खीचिए।

4. जिस बिन्दु पर दोनों लम्ब BM और CN प्रतिच्छेदित करें उसे बिन्दु 0 से प्रर्दिशत कीजिए।

5. A को 0 से मिलाइए और आगे बढ़ाइए जो BCको बिन्दुL पर काटे।

∠ ALB नापिए। हम देखते हैं कि ∠ALB =90°; अत: AL ⊥ BCहै जो तीसरा शीर्षलम्ब है।

हमने यह भी देखा कि पहले दो शीर्षलम्बों का प्रतिच्छेदन बिन्दु 0 है।



आकृति 5.25

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष निकलता है कि

एक त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी होते हैं। त्रिभुज के शीर्षलम्बों (तीनों) के संगामी बिन्दु को त्रिभुज का लम्बकेन्द्र (Orthocenter) कहते हैं।

प्रयास कीजिए

अब एक त्रिभुज खीचिए। इसके दो शीर्षलम्ब खीचिए। इनके प्रतिच्छेदित बिन्दु 0 को तीसरे शीर्ष से मिलाकर इतना आगे बढ़ाइए कि यह तीसरी भुजा को काटे। इसके द्वारा बने कोण को नापिए। हम देखते हैं कि यह कोण 90° है। अत: तीनों शीर्षलम्ब बिन्दु 0 से जाते हैं। विशेष : त्रिभुज का लम्बकेन्द्र निकालने के लिए दो शीर्षलम्ब खीचना ही पर्याप्त है, क्योंकि तीसरा शीर्षलम्ब भी इसी प्रतिच्छेद बिन्दु (लम्बकेन्द्र) से होकर जाता है।

अभ्यास 5 (c)

1. नीचे दी गई भुजाओं और कोणों से त्रिभुज खीचकर उनके शीर्षलम्ब खीचिए तथा जाँच कीजिए कि प्रत्येक त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी हैं।

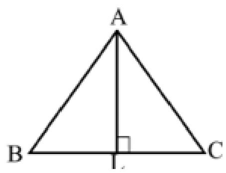
(i) 3.4 सेमी, 5.4 समी, 4.5 सेमी;

(ii) दो भुजाएँ 6 सेमी और 4.5 सेमी तथा इनके बीच का कोण 120°;

(iii) दो भुजाएँ 5 सेमी और 4 सेमी तथा इनके बीच का कोण 90°;

(iv) दो कोण 650 तथा 800 और बीच की भुजा 5 सेमी।

2. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABCखींचिए, जिसमें AB=AC, शीर्ष A से शीर्षलम्ब AL खींचिए। मापकर बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या नहीं।



आकृति5.26

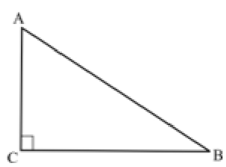
(i) BL = LC

(ii)< ∠B =< ∠C

(iii) ∠<BAL =< ∠CAL

(iv)शीर्षलम्ब AL ने समद्विबाहु ΔABCको दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँट
दिया है।

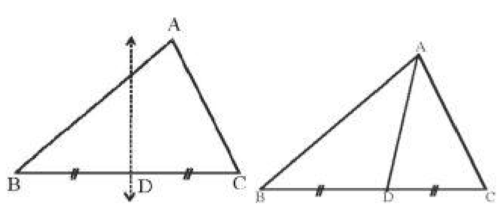
3. ΔABCमें ∠Cसमकोण है। इस त्रिभुज का बिना शीर्षलम्ब खींचे लम्बकेन्द्र बताइए।



आकृति 5.27

5.5.2•त्रिभुज की माध्यिकाएँ :

क्रियाकलाप : कागज के टुकड़े से एक त्रिभुज A BCकाटिए । इसकी कोई एक भुजा जैसे आकृति 5.28 में भुजा BCलीजिए। त्रिभुज के बिन्दु B और Cबिन्दु को मिलाकर कागज मोड़ने की प्रक्रिया द्वारा BCका लम्ब समद्विभाजक ज्ञात कीजिए । कागज पर मोड़ की तह, भुजा BCको D पर काटती है, जो उसका मध्य बिन्दु है । शीर्ष A को D से मिलाइए।



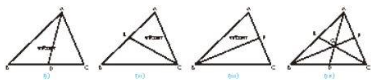
आकृति 5.28

रेखाखंडAD जो BCके मध्य बिन्दु D को सम्मुख शीर्ष A से मिलाता है, त्रिभुज की एक माध्यिका है। भुजा ABतथा CA लेकर, इस त्रभुज की दो और माध्यिकाएं खींचिए ।

माध्यिका, त्रिभुज के एक शीर्ष को, सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाती है ।

इसे देखिए :

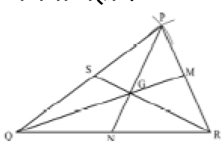
निम्नलिखित आकृति 5.29 को देखिए। चित्र (i) में त्रिभुज के शीर्ष A को उसकी सम्मुख भुजा BCके मध्य बिन्दु D से मिलाया गया है। चित्र (ii) में शीर्ष Cको सम्मुख भुजा ABके मध्य बिन्दु E से मिलाया गया है। चित्र (iii) में शीर्ष B को सम्मुख भुजा ACके मध्य बिन्दु इ से मिलाया गया है। रेखाखंड AD, CE और Bइ त्रिभुज ABCकी माध्यिकाएँ कहलाती है। चित्र (iv) में त्रिभुज ABCकी कितनी माध्यिकाएँ हैं ? हम देखते हैं कि त्रिभुज में तीन माध्यिकाएँ हैं, जो एक बिन्दुगामी होती हैं।



अत:

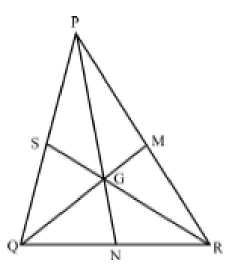
त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से जोड़ने वाले रेखाखंड को त्रिभुज की माध्यिका (Median) कहते हैं।

प्रयोग 1:एक ΔPQR खींचिए जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी हों। PQ, QR और RP के मध्य बिन्दुओं क्रमश: S, N, M को उनके सम्मुख शीर्षों से मिलाइए। बताइए रेखाखंड PN, RS और QM, ΔPQR की माध्यिकाएँ हैं अथवा नहीं ?



क्या तीनों माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से होकर जा रही हैं ?

प्रयोग 2:एक ΔPQR खींचिए जिसकी भुजाएँ 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी हों। PR के मध्य बिन्दु M को शीर्ष Q से मिलाइए।



PQ के मध्य बिन्दु ए को R से मिलाइए। S और Rए त्रिभुज की तीन माध्यिकाओं में से दो माध्यिकाएँ हैं। जिस बिन्दु पर QM और RS मिलती हैं, उस बिन्दु पर G अंकित कीजिए।

P,G मिलाकर बढ़ाइए। मान लीजिए कि यह QR को बिन्दु N पर मिलती है। QN और NR को मापिए। क्या QN=NR है ?

हम देखते हैं कि QN=NR

अत: N भुजा QR का मध्य बिन्दु हुआ और इस प्रकार PN त्रिभुज की तीसरी माध्यिका हुई और तीनों माध्यिकाएँ एक बिन्दु उ से होकर जा रही हैं। अब एक ∠PQR बनाइए। इसकी दो माध्यिकाएँ खींचकर उनके प्रतिच्छेदन बिन्दु को G से

नामांकित कीजिए। तीसरे शीर्ष को इस बिन्दु से मिलाकर आगे बढ़ाइए और देखिए कि यह रेखा माध्यिका है या नहीं। हम देखते हैं कि यह भी माध्यिका है।

अत:

त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी (Concurrent) होती हैं। वह बिन्दु जिस पर त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ मिलती हैं, माध्यिकाओं का संगमन बिन्दु या त्रिभुज का केन्द्रक (centroid)कहलाता है।

विशेष : किसी त्रिभुज का केन्द्रक निर्धारित करने के लिए उसकी दो माध्यिकाएँ खींचना ही पर्याप्त है। उनका प्रतिच्छेदन बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक होता है।

अभ्यास 5 (*d*)

1.निम्नलिखित कथनों को अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) त्रिभुज की माध्यिका वह रेखाखंड है जो इसके किसी शीर्ष को सम्मुख भुजा के .... से मिलाती है।

(ii) किसी त्रिभुज की माध्यिकाएँ .... होती हैं।

(iii) त्रिभुज की माध्यिकाएँ जिस बिन्दु पर मिलती हैं उसे ...... कहते हैं।

2. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABCखींचिए, जिसमें AB=AC। माध्यिका ADखींचिए। नापकर बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या नहीं।

(i) AD, BCपर लम्ब है।

(ii) AD, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

(iii) AD, BCका लम्ब समद्विभाजक है।

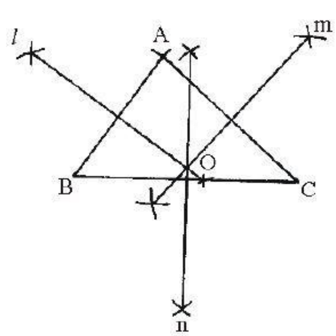
3. AD, BE और CF किसी ΔABCकी माध्यिकाएँ हैं और G इसका केन्द्रक है। यदि BE =CF, तो ΔGBCकिस प्रकार का त्रिभुज है ? आकृति बनाकर देखिए।

(i) विषमबाहु (ii) समद्विबाहु (iii) समबाहु

त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक :

इन्हें कीजिए :

प्रयोग 1: एक त्रिभुज ABCखींचिए जिसकी भुजाएँ क्रमश: 6 सेमी, 7 सेमी और 8 सेमी की हों। भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक भी खींचिए।



आकृति 5.32

रचना : (i) दिए गये नाप से त्रिभुज ABCबनाइए।

(ii) ABको लम्बार्धक (लम्ब समद्विभाजक) l खींचिए।

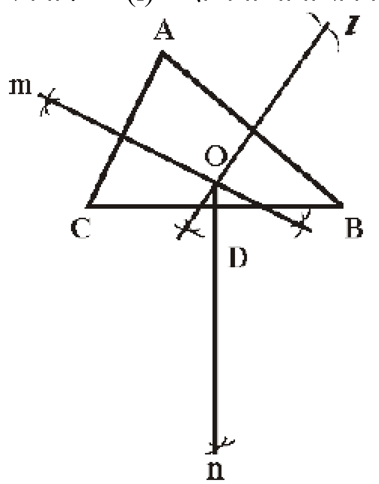
(iii) ACको लम्बार्धक m खींचिए।

(iv) BCका लम्बार्धक n खींचिए।

क्या तीनों लम्बार्धक उपर्युक्त चित्र की भाँति बिन्दु 0 से जा रहे हैं ?

प्रयोग 2:एक ΔABC खींचिए। जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी की हों। भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक भी खींचिए।

रचना : (i) दी गयी मापों से त्रिभुज ABCबनाइए।



(ii)भुजा ABका लम्बार्धक l खींचिए।

(iii) भुजा ACका लम्बार्धक m खींचिए।

(iv) लम्बार्धक l और m जिस बिन्दु पर काटे उसे 0 से नामांकित कीजिए।

(v) 0 से $n \perp BC$ खींचिए जो BCको D पर काटे।

(vi) BD और CD नाप कर देखिए कि क्या BD =CD है ? हम देखते हैं कि BD =CD है। अत: ह, BCका लम्बार्धक है।

इस प्रकार बिन्दु 0 त्रिभुज ABCकी तीनों भुजाओं के लम्बार्धकों का सार्वबिन्दु है।

अब एक त्रिभुज ABC बनाइए। भुजा ABऔर ACके लम्बार्धक खींचिए। दोनों लम्बार्धक जिस बिन्दु पर काटे उस पर 0 अंकित कीजिए। बिन्दु 0 से BC पर लम्ब खींचिए और जाँच कीजिए कि यह BCका लम्बार्धक है या नहीं ?

हमने देखा यह भी लम्बार्धक है और बिन्दु 0 से जा रहा है, अर्थात तीनों लम्बार्धक संगामी हैं।

अत:

त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक संगामी होते हैं। त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक जिस बिन्दु पर मिलते हैं उसे त्रिभुज का परिकेन्द्र (Ci*rcum centre*) कहते हैं।

विशेष :किसी त्रिभुज का परिकेन्द्र निकालने के लिए उसकी दो भुजाओं के लम्बार्धक (लम्ब समद्विभाजक) (खींच लेना ही पर्याप्त होता है।

अभ्यास 5 (e)

1.एक रेखाखंड ABलेकर उसकी लम्ब समद्विभाजक रेखा l खींचिए। l पर कोई बिन्दु P लेकर PA और PB को नापिए। क्या PA और PB बराबर हैं ?

2.एक समकोण त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें ∠Cसमकोण हो। ABका मध्य बिन्दु 0 ज्ञात कीजिए। केन्द्र 0 और त्रिज्या 0A वाला एक वृत खींचिए। क्या यह Cसे होकर जाता है ? ΔABCके संदर्भ में, बिन्दु 0 को क्या कहते हैं ?

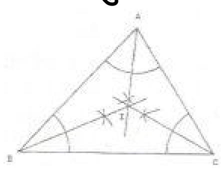
3.नीचे दी गई भुजाओं और कोणों से त्रिभुज बनाइए और उनकी भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक खींचिए और जाँच कीजिए कि वे संगामी हैं ।

(i) 7 सेमी, 5 सेमी और 4 सेमी

(ii) 6 सेमी तथा भुजा पर बने कोण 90° और 30°

(iii) 4.5 सेमी, 2.5सेमी, बीच कोण 105°

5.4.4 त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक



आकृति 5.34

प्रयोग 1. एक त्रिभुज ABC खींचिए। जिसकी भुजाएं 6 सेमी, 7 सेमी और 8 सेमी हो। इस त्रिभुज के कोणों A, B और Cके समद्विभाजक खींचिए।

रचना : दिये गये माप से त्रिभुज AB खींचिए। ∠A, ∠B और ∠Cके समद्विभाजक खींचिए। क्या तीनों समद्विभाजक एक बिन्दुगामी हैं ?

प्रयोग 2. एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसकी भुजाएँ 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी हों। इस त्रिभुज के कोणों B और Cके समद्विभाजक खींचिए।

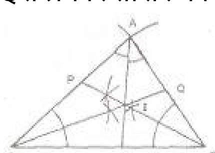
दोनों समद्विभाजक एक दूसरे को जिस बिन्दु पर काटे उसे I से नामांकित कीजिए।

चित्रानुसार A और I को मिलाकर बढ़ाइए। मान लीजिए कि यह BCसे बिन्दु R पर मिलता है।

∠BAR और ∠CAR को मापिए।

हमने देखा कि ∠BAR =∠CAR है। अत: AR, ∠A की समद्विभाजक है।

इस प्रकार तीसरे कोण का समद्विभाजक भी बिन्दु I से होकर जाता है।



आकृति 5.35

अब एक त्रिभुज ABCबनाइए। ∠B और ∠Cके समद्विभाजक खींचिए। समद्विभाजक जिस बिन्दु पर काटे उसे I से नामांकित कीजिए। बिन्दु I को बिन्दु A से मिलाइए और जाँच कीजिए कि AI, ∠A का समद्विभाजक है या नहीं।

हम देखते हैं कि AI कोण A की समद्विभाजक है और तीनों समद्विभाजक एक ही बिन्दु I से जा रहे हैं।

अत:

त्रिभुज के कोण समद्विभाजक संगामी होते हैं। त्रिभुज के कोण समद्विभाजक के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अन्त: केन्द्र (In- Centre) हैं।

विशेष :किसी त्रिभुज का अन्त:केन्द्र निर्धारित करने के लिए उसके दो कोणों के अर्धक खींच लेना ही पर्याप्त होता है। उनका प्रतिच्छेदन बिन्दु ही अन्त:केन्द्र होता है।

अभ्यास 5(f)

1. नीचे दी गई भुजाओं तथा कोणों से त्रिभुज बनाइए और उनके कोणों के समद्विभाजक खींचकर जाँच कीजिए कि क्या वे संगामी हैं।

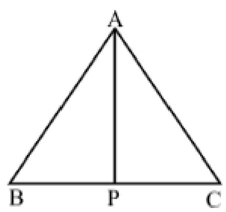
(i) 3.4 सेमी, 4 सेमी तथा 2.5 सेमी

(ii) 4.6 सेमी, 3.5मी तथा बीच का कोण 120°

(iii) 5 सेमी, 4 सेमी तथा5 2. सेमी।

2. एक समबाहु ΔABCखींचिए और उसका अन्त: केन्द्र ज्ञात कीजिए। यह भी ज्ञात कीजिए कि इसके परिकेन्द्र, लम्बकेन्द्र व केन्द्रक इसके अन्त: केन्द्र पर संपाती हैं।

3. पाश्र्व चित्र में ΔABCसमद्विबाहु त्रिभुज हैं, इसमें AB=ACहै, AP, $\angle A$ का अर्धक है। यह रेखाखंड AP, BCका लम्बार्धक है या नहीं। चित्र खींच कर और नापकर बताइए।



आकृति 5.36

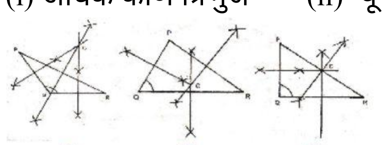
5.6.1-त्रिभुज का परिकेन्द्र :

इन्हें कीजिए :

हमने देखा कि त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक संगामी होते हैं और इस संगमन बिन्दु को त्रिभुज का परिकेन्द्र कहते हैं।

निम्नांकित त्रिभुजों के भी परिकेन्द्र ज्ञात कीजिए और देखिए कि किन त्रिभुजों के परिकेन्द्र, त्रिभुज के बाह्य क्षेत्र में स्थित हैं, किनके अन्त: क्षेत्र में और किन त्रिभुजों के त्रिभुज पर ही स्थित है ?

(i) अधिक कोण त्रिभुज (ii) न्यूनकोण त्रिभुज (iii) समकोण त्रिभुज



आकृति 5.37

चित्र (i) में अधिक कोण त्रिभुज है, इसका परिकेन्द्र त्रिभुज के बाह्य क्षेत्र में स्थित है।

चित्र (ii) न्यूनकोण त्रिभुज है, इसका परिकेन्द्र त्रिभुज के अन्त: क्षेत्र में स्थित है।

चित्र (iii) में समकोण त्रिभुज है, इसका परिकेन्द्र कर्ण पर स्थित है। अधिक कोण त्रिभुज, न्यूनकोण त्रिभुज और समकोण त्रिभुज के परिकेन्द्र ज्ञात कर उपर्युक्त तथ्य की जाँच कीजिए।

अभ्यास 5 (g)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ....

(i) समकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र .... पर स्थित होता है।

(ii) अधिक कोण त्रिभुज का परिकेन्द्र त्रिभुज के ..... में स्थित होता है।

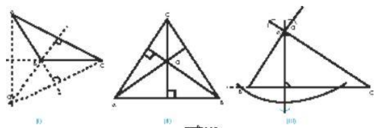
(iii) न्यूनकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र त्रिभुज ...... में स्थित होता है।

2.एक त्रिभुज ABCखींचिए जिसमें AB=3 सेमी, BC=4 सेमी और AC=5 सेमी। इस त्रिभुज का परिकेन्द्र ज्ञात कीजिए।

3.एक अधिक कोण त्रिभुज ABCबनाइए जिसका कोण B अधिक कोण हो, इस त्रिभुज का परिकेन्द्र ज्ञात कीजिए।

5.6.2 त्रिभुज का लम्बकेन्द्र

हम जानते हैं कि त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी होते हैं तथा इनके संगामी बिन्दु को त्रिभुज का लम्ब केन्द्र कहते हैं। निम्नलिखित आकृतियों में शीर्षलम्बों को देखिए कुछ त्रिभुजों के लम्ब केन्द्र त्रिभुज के अन्त: क्षेत्र में और कुछ के बाह्य क्षेत्र में स्थित हैं।



चित्र (i)में लम्बकेन्द्र 0 अधिक कोण त्रिभुज के बाह्य क्षेत्र में स्थित है।

(ii)में लम्बकेन्द्र 0 न्यूनन कोण त्रिभुज के अन्त: क्षेत्र में स्थित है।

(iii)समकोण त्रिभुज BACका लम्ब केन्द्र शीर्ष A पर ही स्थित है।

समकोण त्रिभुज, अधिक कोण त्रिभुज और न्यूनकोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र ज्ञात कर उपर्युक्त तथ्य की जाँच कीजिए।

हमने देखा :

अधिक कोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र त्रिभुज के बाह्य क्षेत्र में न्यूनकोण त्रिभुज का अन्त: क्षेत्र में और समकोण त्रिभुज में शीर्ष पर स्थित है।

अभ्यास 5 (h)

1. एक ΔABCबनाइए, जिसका ∠B अधिक कोण हो। इस त्रिभुज का लम्बकेन्द्र ज्ञात कीजिए।

2. न्यूनकोण त्रिभुज ABCबनाइए तथा इसका लम्बकेन्द्र ज्ञात कीजिए। यह भी बताइए कि इस त्रिभुज का लम्बकेन्द्र त्रिभुज के अन्त: क्षेत्र में स्थित है अथवा बाह्य क्षेत्र में।

त्रिभुज का केन्द्रक

एक त्रिभुज ABCबनाइए। इस त्रिभुज की माध्यिकाएँ AD, CF और BE खींचिए। तीनों माध्यिकाएँ जहाँ काटे उस बिन्दु को G से नामांकित कीजिए। यही बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक है।

AG और DG दूरियाँ नापिये। देखिए कि AG और DG में क्या संबंध है ?

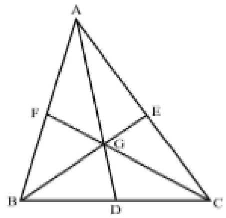
एक दूसरा त्रिभुज ABCबनाइए जिसमें AB=5 सेमी, BC=6 सेमी और CA =7 सेमी हो। इस त्रिभुज की माध्यिका AD, BE और CF खींचिए और संगमन बिन्दु को G से नामांकित कीजिए। AG, GD, BG, GE और CG तथा GF को मापिए तथा निम्नांकित रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(I) AG = ----------- GD = ------------- AG : GD = ---------------

(II) CG = ----------- GF = -------------- CG : GF = ---------------

(III) BG = ----------- GE = -------------- BG : GE = ---------------

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर हम कह सकते हैं कि त्रिभुज का केन्द्रक माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।



आकृति 5.39

त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती हैं। संगमन बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है। इसे G से नामांकित करते हैं। त्रिभुज का केन्द्रक किसी माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अभ्यास 5 (i)

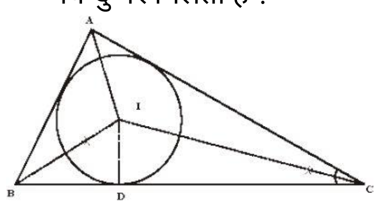
1. समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है। AB= 3 सेमी, BC=4 सेमी। इस त्रिभुज की रचना कर इसका केन्द्रक ज्ञात कीजिए।

2. एक त्रिभुज की माध्यिकाएँ क्रमश: 6 सेमी, 9 सेमी और 12 सेमी लम्बी है। इस त्रिभुज के केन्द्रक द्वारा माध्यिकाओं के विभाजित भाग ज्ञात कीजिए।

5.5.4 त्रिभुज का अन्त: केन्द्र

हम जानते हैं कि त्रिभुज के कोणों के अर्धक संगामी होते हैं। इनके संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अन्त: केन्द्र कहते हैं।

कोई त्रिभुज ABCबनाइए। उसका अन्त: केन्द्र ज्ञात कीजिए। इस बिन्दु को I से नामांकित कीजिए। बिन्दु I से BC भुजा पर लम्ब खींचिए। I को केन्द्र मानकर I D त्रिज्या से एक वृत खींचिए। क्या यह वृत भुजाओं ABऔर ACसे भी एक बिन्दु पर मिलता है ?



आकृति 5.40

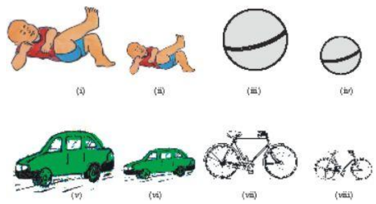
5.7 त्रिभुजों में समरूपता की अवधारणा :

आप जानते हैं कि दो सर्वांगसम आकृतियों में समान आकृति (shape) और समान माप (size) की होती है, प्रकृति में कुछ ऐसी आकृतियों के उदाहरण भी मिलते हैं जो कि आकृति में समान रूप के तो होते हैं, किन्तु 'समान माप' के नहीं होते। ध्यान दीजिए :- किसी फूल के पौधे में सभी फूल समान रूप के होते हुए भी समान आकार के नहीं होते हैं। ऐसी आकृतियों को समरूप (Similar) आकृतियाँ कहते हैं।

आप यह भी दे(ख) सकते हैं कि दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम हों।

समरूपता की अवधारणा :

इन चित्रों को देखिए :



उपर्युक्त चित्र (i) और (ii) में हम देखते हैं कि दोनों चित्र बच्चे के हैं, परन्तु दोनों के आकार भिन्न हैं। चित्र (iiii) और (iv)को देखने से भी स्पष्ट है कि दोनों चित्र एक ही बॉल के हैं, परन्तु इन चित्रों के आकार भिन्न हैं। चित्र (v) और (vi) को देखिए, इनमें भी एक ही कार के दो चित्र है जिनके आकार भिन्न है इसी प्रकार चित्र (vii) और (viii) में दो साइकिलें दिखाई दे रही है इनमें भी दोनों साइकिलों के आकार भिन्न हैं,परन्तु आकृति समान है।

अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि उपर्युक्त चित्रों के जोड़े,रूप में समान हैं परन्तु आकार में भिन्न हैं।

ऐसी आकृतियों को जो रूप में समान हों, परन्तु उनके आकार भिन्न हों, समरूप आकृतियाँ कहते हैं ।

निम्न को भी देखकर बताइए कि उनमें क्या सम्बन्ध है?

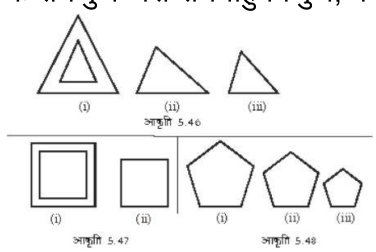
1. अपने घर में छोटे भाई की दो भिन्न आकार की फोटो को।
2. किसी हॉकी के दो भिन्न आकार के चित्रों को।
3. किसी ग्लोब के दो भिन्न आकार के चित्रों को।
4. किसी पेड़ के दो भिन्न आकार के चित्रों को।

हम देखते हैं कि छोटे भाई की फाटो; हॉकी के चित्र; ग्लोब के चित्र तथा पेड़ के चित्र की आकृतियाँ एक सी हैं परन्तु आकार भिन्न हैं।

अब आप एक ही आकृति की पत्तियों और फूलों को एकत्र कीजिए। ऐसी भी पत्तियों और फूलों को एकत्र कीजिए, जिनकी आकृतियाँ समान हैं परन्तु आकार भिन्न हैं ।

इन्हें भी देखिए :

निम्नलिखित आकृतियों को दे खिए इनमें 5.46 में वि भिन्न मापों के चार समबाहु त्रिभुज,5.47 में तीन भिन्न- भिन्न माप के तीन वर्ग और 5.48 में विभिन्न मापों के तीन समपंचभुज है । क्या इनके आकार समान हैं ? क्या ये समरूप है? उपर्युक्त सभी प्रश्नों का उत्तर स्पष्ट रूप से ‘ हाँ है । इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि “सभी समान संख्या की भुजाओं के समभुज जैसे समबाहु त्रिभुज, वर्ग आदि समरूप होते हैं ।



समरूप बहुभुज :

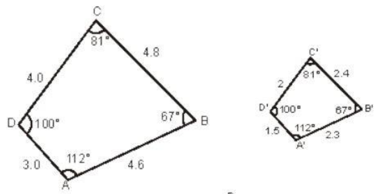
फोटोग्राफर की दुकान में आप ने किसी व्यक्ति के अथवा एक ही वस्तु के या एक ही आकृति के फोटो चित्रों को विभिन्न मापों में एक ही निगेटिव से बने देखा होगा । फोटोग्राफर वह बहुधा छोटे साइज के फिल्म जिसको 35 मि मी माप की फोटो खींचता है। फिर उसको 45 मि मी या 55 मि मी के फिल्म पर आकार / माप बड़ा कर देता है । यदि हम बड़े और छोटे फोटो चित्रों की संगत भुजाओं में अनुपात निकालें तो $\frac{45}{35}$ या $\frac{55}{35}$ होगा । वास्तव में इसका अर्थ है कि छोटे चित्र के प्रत्येक भुजा को फोटोग्राफर समान अनुपात, अर्थात35:45 या3 5:55 में बढ़ा देता है ।

पुन: दो बहुभुज जिनके भुजाओं की संख्या समान है समरूप होते हैं, यदि

(i) उनके संगत कोण बराबर हों, और

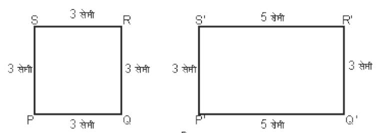
(ii) उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में हों ।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि निम्नांकित चतुर्भुजABCD और A’B’C’D’ समरूप हैं।



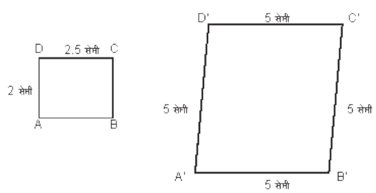
आकृति 5.49

अब निम्नलिखित, दो आकृतियाँ जो कि एक वर्ग और दूसरी आयत है पर ध्यान दीजिए। इनके संगत कोण बराबर हैं। परन्तु उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में नहीं है। अत: दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं है।



आकृति 5.50

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि वर्ग और समचतुर्भुज की संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं परन्तु उनके संगत कोण बराबर नहीं है। अत: दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं है।



आकृति 5.51

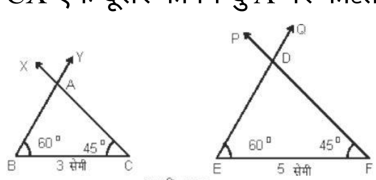
अत: उपर्युक्त आकृति 6.7 (i) और आकृति 6.7 (ii) में से केवल एक प्रतिन्ध किसी बहुभुज के समरूप होने के लिए पर्याप्त नहीं है।

यूनानी गणितज्ञ थेल्स (600 ई.पू) ने समान कोणिक त्रिभुजों के सम्बन्ध में एक महत्वपूर्ण प्रमेय उद्घघाटित किया था।

समान कोणिक त्रिभुजों की किन्हीं दो संगत भुजाओं का अनुपात सदैव समान होता है। चाहे उनके माप कुछ भी हों।

स्मरण कीजिए कि दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए त्रिभुजों के अवयवों के केवल तीन युग्म लिए थे। इसी प्रकार प्रयास करते हैं कि दो त्रिभुजों की समरूपता स्थापित करने के लिए त्रिभुजों के कुछ कम अवयवों की ही आवश्यकता हो। आइए इसके लिए कुछ क्रिया कलाप करें।

क्रिया कलाप -दो रेखाखंड BCऔर EF क्रमश 3 सेमी और 5 सेमी को खींचिए। बिन्दु B और E पर 60^0 के कोण YBC और QEF की रचना कीजिए तथा बिन्दु Cऔर इ पर 45° के कोर्णे CB और PFE की रचना कीजिए। भुजाएँ BY और CX एक दूसरे को बिन्दु A पर काटती हैं। तथा भुजाएँ QE और PF, D पर प्रतिच्छेद करती हैं।



आकृति 5.52

इस प्रकार हमें दो त्रिभुज ABCऔर DEF प्राप्त होते हैं।

स्पष्टत: कोण ∠ A और ∠ D 75 के हैं।ध्यान दीजिए, त्रिभुजों ABC और DEF में ∠ A = ∠ D, ∠ B = ∠ E और ∠ C = ∠ F मिलता है जो कि संगत कोण हैं। अत: संगत कोण बराबर हैं। अब दोनों त्रिभुजों की भुजाओं AB, AC, DE, DF की माप ज्ञात करके, अनुपात $\frac{AB}{DE}$, $\frac{AC}{DF}$ तथा $\frac{BC}{EF}$ ज्ञात कीजिए

उपर्यक्त चित्रों में $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} (=.6)$ के हैं।

अर्थात संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं। इसीलिए त्रिभुज ABCतथा DEF समरूप हैं।

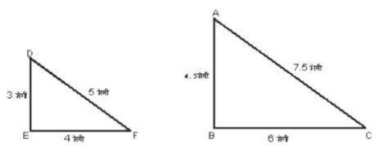
इन्हें कीजिए

इस क्रिया कलाप को अनेक त्रिभुजों जिनके संगत कोण बराबर हों, के युग्म बनाकर कीजिए। प्रत्येक बार निम्न निष्कर्ष प्राप्त होगा।

यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ अनुपातिक होती हैं और इस प्रकार दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

क्रिया कलाप 1 : दो समरूप त्रिभुज बनाने का प्रयास कीजिए इसके लिए आकृति 5.56(i) और (ii) को दे(िख)ए और अपनी अभ्यास पुस्तिका पर माप के अनुसार दोनों त्रिभुजों को खींचिए। इनकी संगत भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए। हम देखते हैं कि

$\frac{AB}{DE} = \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2}$,



आकृति 5.56

$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ तथा

$\frac{CA}{FD} = \frac{7.5}{5} = \frac{3}{2}$

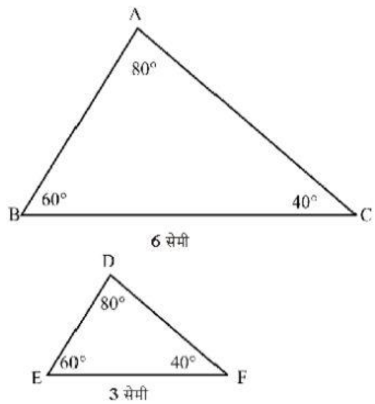
दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं के अनुपात समान हैं। अब इनके कोणों को मापिए।

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ तथा $\angle C = \angle F$

अत: यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात समान हो तो उनके संगत कोण भी समान होते हैं।

क्रिया कलाप : 2 इसे भी कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर दो त्रिभुज खींचिए जिनकी माप आकृति 5.57 (i) और (ii) के अनुसार हों। अब दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं AB और DE, BC और EF तथा CA और FD को नापिए और इनका अनुपात ज्ञात कीजिए। हम देखते हैं कि



आकृति 5.57

$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$

$\frac{2}{1} = \frac{BC}{EF}$

$\frac{2}{1} = \frac{BC}{EF}$

अर्थात्

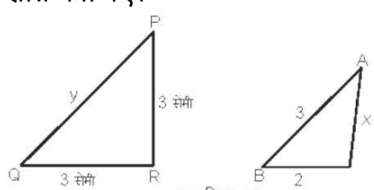
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{2}{1}$

अर्थात् दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं के अनुपात समान हैं, चित्र से स्पष्ट है कि इनके संगत कोण समान हैं।
अत:

यदि दो त्रिभुजों के कोण समान हों तो उनकी संगत भुजाओं के अनुपात समान होते हैं।

अभ्यास 5 (j)

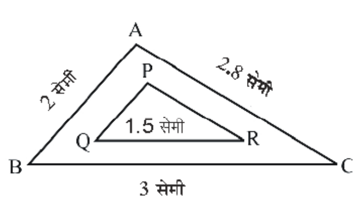
1. आकृति 85.5 में दो त्रिभुज ABC और PQR समरूप हैं। इनकी भुजाओं की लम्बाइयाँ सेमी में अंकित हैं। x और y ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.58

2.यदि किसी त्रिभुज ABCऔर त्रिभुज PQR में उनकी भुजाएँ क्रमश: AB=3 सेमी, BC=5 सेमी, CA =4 सेमी तथा PQ =7 सेमी, PR =6 सेमी, QR =8 सेमी हैं, तो त्रिभुज समरूप हैं या नहीं ?

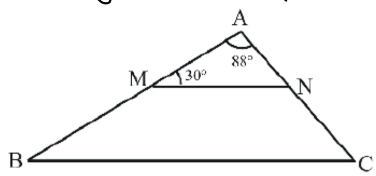
3.आकृति 5.59 में त्रिभुज ABCऔर त्रिभुज PQR समरूप हैं। त्रिभुज PQR की शेष भुजाओं को ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.59

4. त्रिभुज ABCमें, MN, BCके समान्तर है। ΔABCके शेष कोणों की माप बताइए। क्या त्रिभुज ABCऔर त्रिभुज AMN समरूप हैं ?

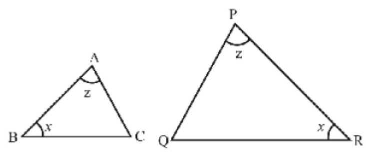
5. उपर्युक्त आकृति 5.60 में, यदि M तथा N क्रमश: AB और AC भुजाओं के मध्य बिन्दु हों, तो भुजा BCऔर MN का अनुपात ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.60

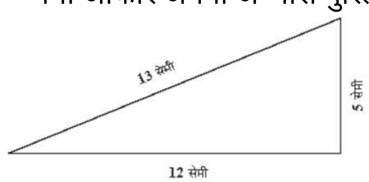
6.दो समान्तर रेखाखंडAB और CD खींचिए। A को D से और B को Cसे मिलाइए। मान लीजिए कि वे एक दूसरे को बिन्दु 0 पर काटती हैं। क्या त्रिभुज 0ABऔर त्रिभुज 0DCसमरूप होंगे ?

7.क्या आकृति 5.61 में त्रिभुज ABCऔर त्रिभुज PRQ समरूप हैं ? यदि हाँ, तो कारण बताइए।



आकृति 5.61

8. 20 मी=1 सेमी मान कर एक खेत का आकार आकृति 5.62 में दर्शाया गया है। 40 मीटर =1 सेमी मान कर खेत का नया आकार अपनी अभ्यास पुस्तिका पर दर्शाइए।



आकृति 5.62

दी गयी भुजाओं के अनुपात के आधार पर समरूप त्रिभुजों की रचना -

दिये गये शर्तों के आधार पर समरूप त्रिभुज की रचना हम एक उदाहरण द्वारा समझेंगे।

उदाहरण - एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाओं में 2:3:4 का अनुपात हो, इसके सम रूप दूसरे त्रिभुज की रचना भी कीजिए।

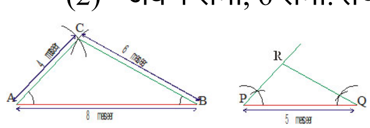
दिया है - एक त्रिभुजABC जिसकी भुजाओं में अनुपात 2:3:4 है।

रचना करनी है - त्रिभुज ABC के समरूप (त्रिभुज PQR) की रचना

रचना के चरण -(1) त्रिभुज की भुजाओं में अनुपात 2:3:4 है। इस अनुपात में 2 से गुणा करने पर भुजाएँ क्रमश: 2X2=4सेमी. 3X2=6सेमी., 4X2=8सेमी.होगी।

ध्यान दें : यहाँ 2 के स्थान पर किसी भी संख्या से गुणा कर सकते हैं।

(2) अब 4 सेमी, 6 सेमी. तथा 8 सेमी. की भुजाओं का त्रिभुज बनाया।



(३) उपरोक्त ABC के सभी कोणों को मापा।

(४) अब रेखाखण्ड PQ=5 सेमी खींचा। यह रेखाखण्ड किसी भी माप का खींचा जा सकता है।

(५) कोण A=कोणP को बनाया इसी प्रकारकोण A=कोण P खींचा
कोण बनाने वाली भुजाएँ परस्पर बिन्दु R पर काटती हैं।

यही PQR,ABC के समरूप अभीष्ठ त्रिभुज होगा।

अभ्यास - 5(K)

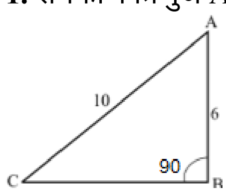
१. यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजाओं में 4:4:5 का अनुपात हो, तो उनके समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए। जिसका आधार 6 सेमी हो।

२. यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजाओं में 3:4:5 का अनुपात हो, तो उनके समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए। जिसका आधार 7 सेमी हो।

३. यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजाओं में 2:4:5 का अनुपात हो, तो उनके समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए। जिसका आधार 8 सेमी हो।

दक्षता अभ्यास -5

1. समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^0$, AB = 6.0 सेमी, AC = 10 सेमी, तो BC की माप होगी :

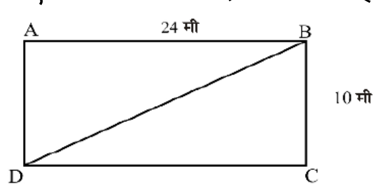


आकृति 5.41

(i) 6 सेमी **(ii)** 10 सेमी

(iii) 8 सेमी **(iv)** इनमें से कोई नहीं

2.एक आयताकार मैदान की लम्बाई 24 मी, चौड़ाई 10 मी है। इस आयताकार मैदान का विकर्ण होगा :

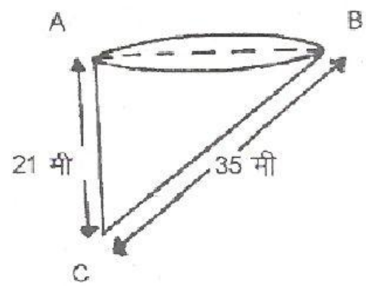


आकृति 5.42

(i) 26 मीटर **(ii)** 29 मीटर

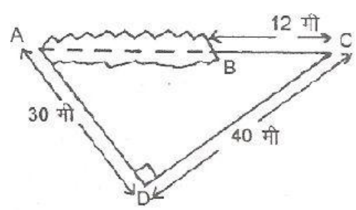
(iii) 20 मीटर **(iv)** 24 मीटर

3.एक सर्वेक्षक (Surveyor) बिन्दु A और B के बीच की दूरी ज्ञात करना चाहता है किन्तु वह A से B तक सीधा नहीं पहुँच सकता, अत: वह चित्रानुसार एक समकोण त्रिभुज बनाता है जिसमें AC = 21 मी, BC = 35 मी, AB कितना लम्बा है ?



आकृति 5.43

4. बिन्दु A और B एक झील के विपरीत किनारे हैं। एक सर्वेक्षक A और B के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए आकृति 2.46 के अनुसार एक समकोण त्रिभुज ADC बनाता है। बिन्दु A से बिन्दु B के बीच की दूरी कितनी है, जबकि BC = 12 मीटर~



आकृति 5.44

(संकेत - समकोण ΔADC में)

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$= 30^2 + 40^2$

$= 900 + 1600$

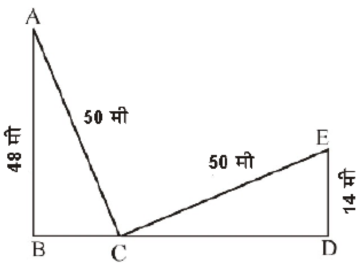
$AC^2 = 2500$

$AC = 50$ मीटर

$\therefore AB = AC - BC = 50 - 12 = 38$ मीटर

5.एक सड़क के दोनों किनारों पर दो मकान आमने-सामने हैं। 50 मी लम्बी सीढ़ी का एक सिरा सड़क के एक ओर स्थित मकान की दीवार पर 48 मी ऊँचाई तक पहुँचता है तथा दूसरे किनारे वाले मकान की दीवार पर यह केवल 14 मीटर ऊँचाई तक पहुँचता है। सड़क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

(संकेत-चित्रानुसार सड़क की चौड़ाई (BD = BC + CD)



आकृति 5.45

6. उस त्रिभुज का नाम बताइए जिसके परिकेन्द्र और अन्त: बिन्दु एक ही होते हैं।

7.3, 4, 5 पाइथागोरियन त्रिक हैं। दिखाइए कि १५, २०, २५ भी पाइथोगोरियन त्रिक हैं।

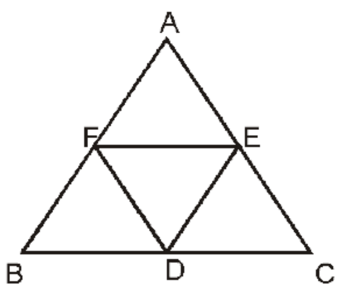
एम.एस.ई. प्रश्न

८. किसी त्रिभुज के तल पर स्थित बिन्दु जो त्रिभुज की भुजाओं से बराबर लम्बवत् दूरी पर है, वह बिन्दु त्रिभुज का (२००६)

(i) अन्त:केन्द्र होता है। (ii) परिकेन्द्र होता है।

(iii) लम्बकेन्द्र होता है। (iv) केन्द्रक होता है।

९.संलग्न चित्र में DEF का क्षेत्रफल होगा(2007)



DEF भुजाओं के मध्य बिन्दु है

(i) $\frac{1}{2}\ \Delta ABC$ **(ii)** $\frac{1}{3}\ \Delta ABC$

(iii) $\frac{1}{4}\ \Delta ABC$ **(iv)** ΔABC

इस इकाई में हमने सीखा :

1. समकोण त्रिभुज में समकोण के सम्मुख भुजा को कर्ण कहते हैं । यह समकोण बनाने वाली दोनों भुजाओं से बड़ी होती है ।

2. किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है । इसे पाइथागोरस प्रमेय कहते हैं ।

3. किसी रेखा के बाहर दिये हुए किसी बिन्दु से जो भी रेखाखंड इस रेखा तक खींचे जा सकते हैं, उनमें लम्ब सबसे छोटा होता है ।

4. यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा पर बना वर्ग, शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर हो तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है । यही प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय का विलोम है ।

5. यदि a, b, c पाइथागोरियन त्रिक है तथा k एक धन पूर्णांक है तो ak ,bk , और ck भी पाइथागोरियन त्रिक है ।

6. त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाले गये लम्ब रेखाखंड को त्रिभुज का शीर्ष लम्ब (Altitude) कहते है । त्रिभुज में तीन शीर्ष होते हैं।

7. एक त्रिभुज के शीर्ष लम्ब संगामी होते हैं। त्रिभुज के शीर्ष लम्बों (तीनों) के संगामी बिन्दु को त्रिभुज का लम्ब केन्द्र (Orthocenter) कहते है ।

8. त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलने वालेरेखाखंड को त्रिभुज की माध्यिका (Median) कहते है ।

9. त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती है । वह बिन्दु जिस पर त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएं मिलती हैं, माध्यिकाओं का संगमन बिन्दु या त्रिभुज का केन्द्रक (Centroid) कहलाता है।

10. त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक संगामी होते है। त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक जिस बिन्दु पर मिलते हैं उसे त्रिभुज का परिकेन्द्र (Circum-Centre) कहते हैं ।

11. त्रिभुज के कोण समद्विभाजक संगामी होते हैं। त्रिभुज के कोण समद्विभाजक के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अंत: केन्द्र (In-Centre) कहते हैं।

12. त्रिभुज का केन्द्रक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता हैं।

13. (i)दो बहुभुज जिनके भुजाओं की संख्या समान है, समरूप होते हैं, यदि

(a) उनके संगत कोण बराबर हों, और

(b) उनकी संगत भुजाएं समान अनुपात में हों ।

(ii) यदि त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात समान हो, तो उनके संगत कोण भी समान होते हैं ।

(iii) यदि दो त्रिभुजों के कोण समान हों, तो उनकी संगत भुजाओं के अनुपात समान होते हैं ।

उत्तरमाला

अभ्यास **5 (a)**

1. (ii) 10; सेमी **2.** (iii) 5 सेमी; **3.** (i) x^2, (ii) 5^2, (iii) p^2, (iv) -8^2; **4.** 25 सेमी; **5.** 12 सेमी; **6.** 60 डेसीमी; **7.** 10 मी; **9.** (i) (5, 12, 13), (iv) (8, 15, 17), (v) (3, 4, 5)

अभ्यास 5 (c)

2. (i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, **3.** AC और BC का प्रतिच्छेद बिन्दु C

अभ्यास 5 (d)

1. (i) मध्य बिन्दु, (ii) संगामी, (iii) केन्द्रक, **2.** (i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य; **3.** (ii) समद्विबाहु।

अभ्यास 5 (e)

1. हाँ; **2.** हाँ, परिकेन्द्र

अभ्यास 5 (f)

1. (i) हाँ, (ii) हाँ, (iii) हाँ; **2.** सत्य; **3.** हाँ

अभ्यास 5 (g)

1. (i) कर्ण (ii) वाह्य क्षेत्र, (iii) अन्त:क्षेत्र; **2.** कर्ण; **3.** वाह्य क्षेत्र में

अभ्यास 5 (h)

1. वाह्य क्षेत्र में; **2.** अन्तक्षेत्र में

अभ्यास 5 (i)

1. (i) मध्यिकाओं संगामी बिन्दु, (ii) 2 : 1

अभ्यास 5 (j)

1. 2, 4.5; **2.** नहीं; **3.** PQ = 1 सेमी, PR = 1.4 सेमी; **4.** $\angle B = 30$, $\angle C = 62^0$, हाँ; **5.** 2 : 1, **6.** हाँ, **7.** हाँ,क्योंकि $\angle C = \angle Q = 180^0 - (x + z)$; **8.** 2.5 सेमी, 6 सेमी, 6.2 सेमी

दक्षता अभ्यास 5

1. (iii) 8 सेमी; **2.** (i) 26 मीटर; **3.** AB = 28 मीटj; **4.** AC = 38 मीटर; **5.** 62 मीटर; **7.** (6, 8, 10), (12, 16, 20), (18, 24, 30); **8.** समबाहु त्रिभुज; **9.** (iii) $\frac{x}{4} = 4 \Delta ABC$

इकाई -6 रेखीय समीकरण

AZKM7B

- **रेखीय समीकरण और उनका हल**
- **ax + b= cx + d (a≠c) प्रकार के रेखीय समीकरणों का हल**
- **व्रजगुणन विधि द्वारा रेखीय समीकरणों का हल**
- **रेखीय समीकरणों पर आधानित वार्तिक प्रश्न**

6.1. भूमिका

पिछली कक्षा में आपने बीजीय व्यंजक और समीकरण के बारे में जानकारी प्राप्त कर ली है, आपने पढ़ा है कि समीकरण व्यंजक के चर पर वह प्रतिबन्ध है जिसमें चर के विशिष्ट मान के लिए दोनों पक्षों के व्यंजकों के मान बराबर होते हैं। समीकरण में प्रयुक्त यदि चर की घात एक होती है तो ऐसे समीकरण को रेखीय समीकरण कहते हैं।

यहाँ पर हम एक ऐसे रेखीय समीकरण को हल करने की विधि सीखेंगे, जिसके दोनों पक्षों में चर (यथा ax + b= cx + d) हों, इसके अतिरिक्त कुछ रेखीय समीकरण जैसे $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ जहाँ (cx + d ≠ 0) प्रकार के समीकरणों को व्रजगुणन विधि से हल करना सीखेंगे।

6.2 रेखीय समीकरण बनाना

आइए कुछ उदाहरण ले कर समीकरण बनाएँ।

उदाहरण 1 - कक्षा 7 की गणित अध्यापिका नीलम ने कहा दीप्ती मान लो तुम्हारे पास कुछ रुपये हैं, यदि इन रुपयों की संख्या के 5 गुने में 10 रुपया मिला दूँ तो तुम्हारे पास कितने रुपये होंगे। दीप्ती ने उत्तर दिया 60 रुपये हो जायेंगे। अध्यापिका ने कहा इसे समीकरण के रूप में लिखकर दिखाओ।

दीप्ति ने कहा - मान लीजिए मेरे पास x रुपये हैं।

x रुपये का 5 गुना $=5x$

अत: समीकरण होगा $5x+10=60$

उदहारण 2: अध्यापिका ने आशीष से कहा, आशीष तुम्हारे पास जो रुपये हैं उसका 10 गुना करके 20 रुपया मुझे दे दो तो तुम्हारे पास कितने रुपये बच जायेंगे, आशीष ने उत्तर दिया, मेरे पास 50 रुपये बचेंगे।

इसे समीकरण के रूप में लिखो,

माना आशीष के पास x रुपये हैं

x का 10 गुना $=10x$

$10x$ रुपये में से 20 रु देने पर, जो शेष बचता है

वह 50 रु के बराबर है।

अत: समीकरण $10x - 20 = 50$

प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित कथनों से समीकरण बनाइए :

(i) किसी संख्या का तिगुना और 11 का योग 32 है

(ii) डेविड के पिता की आयु उसकी आयु के 5 गुने से 7 वर्ष कम है। डेविड के पिता की आयु 49 वर्ष है।

(iii) संख्याएँ x और 4 का योग 11 है।

(iv) एक संख्र्या x की चौथाई में से 4 घटाने पर 5 प्राप्त होता है।

(v) यदि x के एक तिहाई में 3 जोड़े तो आपको 5 प्राप्त होता है।

6.2.1 रेखीय समीकरणों को हल करना, जबकि एक पक्ष में व्यंजक और दूसरे पक्ष में संख्या हो

समीकरण $x + 3 = 7$ पर विचार कीजिए।

यहाँ चर x को पृथक करने के लिए दोनों पक्षों से 3 घटायेंगे।

उदाहरण 1 $x + 3 = 7$

$x + 3 - 3 = 7 - 3$

$x = 7 - 3$

$x = 4$

यही समीकरण का हल है

इसी प्रकार निम्नलिखित समीकरण पर ध्यान दीजिए

$x - 5 = 9$

इस समीकरण में चर को पृथक करने के लिए दोनों पक्षों में 5 जोड़ना होगा।

$x - 5 + 5 = 9 + 5$

$x = 9 + 5$

$x = 14$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित समीकरणों को हल कीजिए

(i) $x + 2 = 4$ (ii) $5x = 20$ (iii) $\frac{x}{4} = 4$

6.2.2 रेखीय समीकरणों को पक्षान्तर द्वारा हल करना :

समीकरण के एक पक्ष अंक या अक्षर संख्या को दूसरे पक्ष में ले जाने की क्रिया को पक्षान्तर कहते हैं।ध्यान दीजिए उदाहरण (1) में दोनों पक्षों से 3 घटाया और उदाहरण 2 के

दोनों पक्षों में 5 जोड़ा है। आपने देखा कि जो संख्या जोड़ी या घटाई जाती है वह संख्या दूसरे पक्ष में विपरीत चिह्न के साथ आ जाती हैं।

अत: शीघ्रता के लिए समीकरण के एक पक्ष की संख्या को आवश्यकतानुसार विपरीत चिह्न के साथ दूसरे पक्ष में रखा जा सकता है। इस प्रक्रिया को पक्षान्तरण कहते हैं।

उदाहरण 2 :समीकरण $x+5=3$ को हल कीजिए।

हल : $x + 5 = 3$

दोनों पक्षों से 5 घटाने पर, $x + 5 - 5 = 3 - 5$

या, $x = 3 - 5$

ध्यान दीजिए, बायें पक्ष का 5 दायें पक्ष में -5 के रूप में आ गया। इसे पक्षान्तर कहते हैं।

या, $x = -2$

किसी समीकरण को हल करते समय x का मान ज्ञात करने के लिए समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या को जोड़ते या घटाते हैं तो इस प्रक्रिया में संख्या के पक्षों में परिवर्तन होता है।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि किसी पद का पक्षान्तर करने पर उसके चिह्न +,– क्रमश: –, + में बदल जाते हैं।

प्रयास कीजिए :

• निम्नालिखित प्रश्नों में पक्षान्तर क्रिया करके समीकरण हल कीजिए।

(i) $x + 7 = 12$ (ii) $x - 5 = 8$ (iii) $x - 3 = -6$

कोई धनात्मक पद एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाने पर ऋणात्मक हो जाता है।

कोई ऋणात्मक पद एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाने पर धनात्मक हो जाता है।

पुन: दीप्ती और आशीष द्वारा बनाए गये समीकरण को याद कीजिए

दीप्ती द्वारा बनाया गया समीकरण है $5x + 10 = 60$ ---------- (i)

आशीष द्वारा बनाया गया समीकरण $10x - 20 = 50$ ---------- (ii)

हल 1. $5x + 10 = 60$

$5x = 60 - 10$ पक्षान्तर से

$5x = 50$

$$\frac{5x}{5} = \frac{50}{5}$$ .... 5 से भाग देने पर

$x = 10$

दीप्ती के पास 10 रुपये थे

हल 2 $10x - 20 = 50$

$10x = 50 + 20$

$10x = 70$

$$\frac{10x}{10} = \frac{70}{10}$$

$x = 7$

आशीष के पास 7 रुपये थे।

उदाहरण **3 :** $\frac{x}{3} + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$

हल : $\frac{5}{2}$ को दाएँ पक्ष में पक्षान्तर करने पर

$$\frac{x}{3} = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}$$

$$\frac{x}{3} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$\frac{x}{3} = -4$$

दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर

$$\frac{x}{3} \times 3 = -4 \times 3$$

$x = -12$

जाँच :बायाँ पक्ष $== \frac{x}{3} + \frac{5}{2} = -3$

$= \frac{-12}{3} + \frac{5}{2}$ (x का मान रखने पर)

$= -4 + \frac{5}{2} = \frac{-8+5}{2}$

$= \frac{-3}{2}$

=दायाँ पक्ष

प्रयास कीजिए :

हल कीजिए $\frac{15}{4} - 7x = 9$ तथा उत्तर की जाँच कीजिए

हल कीजिए $\frac{3}{7} + x = \frac{17}{7}$ तथा उत्तर की जाँच कीजिए

ax + b= cx + d (a≠c) समीकरण हल करना जब दोनों पक्षों में चर हो

आपने अब तक जो समीकरण हल किए उनमें दाएँ पक्ष में एक संख्या थी। लेकिन सदैव ऐसा होना आवश्यक नहीं है। दोनों पक्षों में चर राशि हो सकती हैं। उदाहरण के लिए, $3x - 5 = x + 3$ में दोनों पक्षों में चर है।

अब ऐसे समीकरणों को हल करना सीखेंगे।

उदाहरण 4: हल कीजिए $3x - 5 = x + 3$

हल : $3x - 5 = x + 3$ (-5 का पक्षान्तर करने पर)

या $3x = x + 3 + 5$

या $3x - x = 8$ (x का पक्षान्तर करने पर)

या $2x = 8$ दोनों पदों 2 से भाग देने पर

या $x = \frac{8}{2} = 4$

उदाहरण 5 : समीकरण $5x - 7 = x + 5$ को हल कीजिए।

हल **:** $5x - 7 = x + 5$

या, $5x = x + 5 + 7$ (–7 का पक्षान्तर करने पर)

या, $5x = x + 12$

या, $5x - x = 12$ (x का पक्षान्तर करने पर)

या, $4x = 12$

या, $\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$ (दोनों पक्षों में 4 से भाग देने पर)

$\therefore x = 3$

सत्यापन : $5x - 7 = x + 5$ **दायाँ पक्ष** $= x + 5 = 3 + 5$

बायाँ पक्ष $= 5x - 7 = 5 \times 3 - 7 = 8$

$= 15 - 7$

$= 8$

चूँकि 8=8

अर्थात बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अत: प्राप्त हल सही है।

उदाहरण 6 :समीकरण $2(x - 1) = 10 - x$ को हल कीजिए।

हल **:** $2(x - 1) = 10 - x$

या, $2x - 2 = 10 - x$(कोष्ठक हल करने पर)

या, $2x = 10 - x + 2$ (–2 का पक्षान्तर करने पर)

या, $3x = 12$ ($-x$ का पक्षान्तर करने पर)

या, $\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ (दोनों पक्षों में 3से भाग देने पर)

$\therefore x = 4$

सत्यापन : $2(x - 1) = 10 - x$

दायाँ पक्ष $= 2(x - 1)$ **बायाँ पक्ष**$= 10 - x = 10 - 4$

$= 2(4 - 1) = 2 \times 3 = 6$

$= 6$

बायाँ पक्ष =दायाँ पक्ष, अत: प्राप्त हल सही है।

समीकरण को सरल रूप में बदलना

उदाहरण 7 : समीकरण $\frac{x-1}{4} + 2 = 1 + \frac{2x+3}{6}$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{(x-1)\times 12}{4} + 2 \times 12 = 1 \times 12 + \frac{(2x+3)\times 12}{6}$

या, $\frac{(x-1)\times 12}{4} + 2 \times 12 = 1 \times 12 + \frac{(2x+3)\times 12}{6}$ (हर 4,6 के ल0स012 से दोनों पक्षों में गुणा करने पर)

या, $(x - 1) \times 3 + 24 = 12 + (2x + 3) \times 2$

या, $3x - 3 + 24 = 12 + 4x + 6$

या, $3x = 12 + 4x + 6 + 3 - 24$ (–3 तथा 24 का पक्षान्तर करने पर)

या, $3x = 4x - 3$

या, $3x - 4x = -3$ ($4x$ का पक्षान्तर करने पर)

या, $-x = -3$

$x = 3$ (-1 से दोनों पक्षों में भाग देने पर)

सत्यापन : $\frac{x-1}{4} + 2 = 1 + \frac{2x+3}{6}$

या, $\frac{2}{4} + 2 = 1 + \frac{9}{6}$ ($x = 3$ प्रतिस्थापित करने पर)

या, $\frac{10}{4} = \frac{15}{6}$

या, $\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

बायाँ पक्ष =दायाँ पक्ष

अत: प्राप्त हल सही है।

प्रयास कीजिए :

(iv) $4y + \frac{y}{5} = 21$ **(v)** $\frac{6y+1}{3} + 1 = \frac{7y-3}{3}$

(vi) $0.6x + \frac{4}{5} = 0.28x + 1.16$

अभ्यास 6 (a)

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए एवं अपने उत्तर की जाँच कीजिए :

(i) $3x - 5 = 4$ **(ii)** $5y + 2 = 3y + 8$

(iii) $3x + 12 = 24$ **(iv)** $6y - 9 = 2y + 15$

(v) $18 - 5y = 3y - 6$

2. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए और उत्तर की जाँच कीजिए :

(i) $\frac{x}{3} - 7 = 4$ **(ii)** $\frac{x}{3} + 2x = 14$

(iii) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ **(iv)** $\frac{3x}{4} + \frac{x}{6} = 22$

3. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए और उत्तर की जाँच कीजिए :

(i) $\frac{x-3}{5}+\frac{x-4}{7}=6-\frac{2x-1}{35}$

(ii) $\frac{x+3}{7}-\frac{2x-5}{3}=\frac{3x-5}{5}-25$

(iii) $\frac{3y-2}{7}-\frac{5y-8}{4}=\frac{1}{14}$

(iv) $\frac{x+3}{2}-\frac{3x+1}{4}=\frac{2(x-2)}{3}-2$

4. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $1.5\,y - 7 = 0.5\,y$ **(ii)** $2.8\,x = 5.4 + x$

(iii) $0.5\,y + 0.2\,y = 0.3\,y + 2$ **(iv)** $0.16\,(5x - 2) = 0.4\,x + 7$

5. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए एवं उत्तर की जाँच कीजिए :

(i) $x + 2\,(x - 2) + 3x = 35$

(ii) $3x - 2\,(x - 5) = 2\,(x + 3) - 8$

(iii) $15\,(y - 4) - 2(y - 9) + 5(y + 6) = 0$

(iv) $7(3 - 2x) + 3(5 - 4x) = 45$

(v) $3\,(15 - 4x) + 5(3x - 7) = 15$

वज्रगुणन विधि से $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ जहाँ $cx + d \neq 0$ प्रकार के समीकरण हल करना -

उदाहरण : $\frac{20x+6}{3x+2}=6$ को हल कीजिए।

हल: दोनों पक्षों में $(3x + 2)$ से गुणा कीजिए

$= 6(3x + 2)$

या $20\,x + 6 = 18x + 12$

या $20x - 18\,x = 12 - 5$ (पक्षान्तर विधि से)

$2x = 6$ (दोनों पक्षों में २ से भाग देने पर)

या $x = 3$

इस प्रश्न को निम्न लिखित प्रकार से भी हल कीजिए

$$\frac{20x+6}{3x+2} = 6$$

या $\frac{20x+6}{3x+2} \times \frac{6}{1}$ (6 को $\frac{6}{1}$ लिख सकते हैं)

यहाँ दिखाये गये तीर के अनुसार बायें पक्ष के अंश (20 x + 6) का गुणा दायें पक्ष के हर 1 में कीजिए। इसी प्रकार बायें पक्ष के हर का गुणा दायें पक्ष के अंश में कीजिए और दोनों गुणनफलों के बीच समता का चिन्ह (=) लगा दीजिए। देखिए

$(20x + 6) \times 1 = (3x + 2) \times 6$

$20x + 6 = 18x + 12$

$20x - 18x = 12 - 6$

$2x = 6$ (दोनों पक्षों में २ से भाग देने पर)

$x = 3$

उत्तर की जाँच -

बायें पक्ष में $x = 3$ रखने पर

बाँया पक्ष $= \frac{20 \times 3 + 6}{3 \times 3 + 2}$

$= \frac{60+6}{9+2}$

$= \frac{66}{11}$

$= 6$

दायाँ पक्ष

इस विधि को वज्रगुणन विधि कहते हैं।

उदाहरण :दो संख्याओं का अन्तर 44 है। इनमें से बड़ी संख्या में, छोटी संख्या से भाग देने पर भागफल 5 है। इस कथन से समीकरण बनाइए तथा समीकरण को वज्रगुणन विधि से हल कीजिए।

हल : मान लिया छोटी संख्या x है।

इसलिए बड़ी संख्या x + 44 होगी।

अत: दिये हुए प्रतिबन्ध के अनुसार

$$\frac{x+44}{x} = 5$$

x + 44 = 5x (वज्रगुणन से)

x - 5x = -44 (44 तथा 5x का पक्षान्तर करने पर)

-4x = -44

x = 11

अत: छोटी संख्या और बड़ी संख्या = 11+44 = 55

जाँच : यहाँ 55-11 = 44

अत: संख्याओं का अंतर 44 है।

बड़ी संख्या / छोटी संख्या = 55/11 = 5

ध्यान दें

$\frac{ax+b}{cx+d}=k$ के रूप में समीकरणों का हल तभी सम्भव है, जब $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ तथा cx + d ≠ 0यदि $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ तथा cx+d=0 है तो परिमय व्यंजक $\frac{ax+b}{cx+a}$ अचर हो जाता है और समीकरण नहीं बनता है। इसकी जाँच हेतु निम्नांकित उदाहरण देखिए।

उदाहरणार्थ - $\frac{x-2}{3x-6}=\frac{2}{1}$ को देखिए , $3x-6 \neq 0$ या $x \neq 2$

यहाँ पर $\frac{x-2}{3x-6} = \frac{(x-2)}{3(x-2)} = \frac{1}{3}$ क्योंकि $x \neq 2$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित समीकरण बनते हैं या नहीं। यदि बनते हैं तो उन्हें हल कीजिए

1. $\frac{3x+4}{6x+8}=12$

2. $\frac{x+7}{2x-6} = 7$

अभ्यास 6 (b)

1. किसी परिमेय संख्या का अंश उसके हर से 3 कम है। यदि उसके अंश और हर में 5 जोड़ दें, तो नई संख्या का मान हो जाता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

2. वज्रगुणन विधि से हल कीजिए -

(i) $\frac{11x+7}{22x+13} = \frac{6}{7}$

(ii) $\frac{4+7x}{6x+2} = \frac{11}{12}$

(iii) $\frac{3}{4} = \frac{9+8x}{2x+6}$

3. एक भिन्न का हर उसके अंश से 3 अधिक है। यदि अंश और हर दोनों में 5 जोड़ दिया जाता है, तो उसका मान $\frac{4}{5}$ हो जाता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

रेखीय समीकरण पर आधारित वार्तिक प्रश्न

निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए :

क्रमांक	कथन	समीकरण	अभीष्ट संख्या
1.	किसी संख्या में 7 घटाने से शेषफल 13 आता है।	$x-7=13$	20
2.	किसी संख्या और 9 का गुणनफल 36 है।		4
3.	किसी संख्या में 4 से भाग देने पर भागफल 3 आता है।	$\frac{y}{4}=3$	12
4.	किसी संख्या और 12 का योगफल 20 है।		
5.	किसी संख्या में 5 से भाग देने पर भागफल 6 आता है।		
6.	किसी संख्या का दूना 20 है।	$2x=20$	10
7.	किसी संख्या का तिहाई 5 है।		
8.	किसी संख्या के तिगुने से 7 कम 6 है।		

निम्नलिखित समीकरणों को गणितीय कथनों के रूप में अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए और इन्हें संतुष्ट करने वाली संख्या ज्ञात कीजिए :

क्रमांक	समीकरण	कथन	उपर्युक्त मान
1.	$x + 5 = 9$	किसी संख्या में 5 जोड़ने पर योगफल 9 हो जाता है।	
2.	$x - 1 = 19$		
3.	$5x = 30$		
4.	$\frac{x}{5} = 4$		

व्यावहारिक स्थितियों में सरल समीकरणों के अनुप्रयोग

आप ऐसे उदाहरण देख चुके हैं जिनमें दैनिक जीवन की भाषा से कथनों को ले कर उन्हें सरल समीकरण के रूप में बदला जा सका और इन समीकरण को हल करना भी सीख लिया है। इस प्रकार व्यावहारिक स्थितियों से सम्बन्धित समस्याओं का हल प्राप्त करने के लिए इन स्थितियों के संगत समीकरण बना लेते हैं। समीकरण हल करने पर समस्याओं का हल प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 :किसी संख्या के तीन गुने और 12 का योग 72 है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल   यदि अज्ञात संख्या कों x मान लिया जाय तो उसका तीन गुना 3x होगा। प्रश्नसे ज्ञात है 3x और 12 का योग 72 है।

अर्थात् $3x + 12 = 72$

$3x = 72 - 12$

$3x = 60$

3 से दोनों पक्षों में भाग देने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{60}{3}$$

$x = 20$

जाँच $= 3 \times 20 + 12$

$= 60 + 12$

$= 72$ अत: अभीष्ट संख्या 20 है।

अब हम कुछ व्यावहारिक समस्याओं पर विचार करेंगे जो ज्ञात और अज्ञात राशियों के सम्बन्ध में उठती हैं और प्राय: शाब्दिक कथनों द्वारा व्यक्त की जाती हैं।

उदाहरण 9 :किसी संख्या के एक चौथाई से 1 घटाने पर शेषफल 1 है। वह संख्या बताइए।

हल : मान लीजिए कि वह संख्या x है।

संख्या का एक चौथाई x का $\frac{1}{4} = \frac{x}{4}$

प्रश्नानुसार; $\frac{x}{4} - 1 = 1$

या, $\frac{x}{4} = 1 + 1$

या, $\frac{x}{4} = 2$

या, $x = 2 \times 4$

अर्थात $x = 8$

अत: वह संख्या 8 है।

उत्तर की जाँच : संख्या = 8

संख्या का $\frac{1}{4} = 8 \times \frac{1}{4} = 2$

संख्या के $\frac{1}{4}$ में से 1 घटाने पर मान $= 2 - 1$

$= 1$

=दिया गया शेषफल

अत: हल सही है।

उदाहरण 10 :एक त्रिभुज के अन्त: कोण क्रमश: $3x^0$, $(2x + 20)^0$ तथा $(5x - 40)^0$ हैं। सिद्ध कीजिए कि यह एक समबाहु त्रिभुज है।

भुज के तीनों अन्त: कोणों का योगफल 180° होता है। अत:

$3x^0 + (2x^0 + 20^0) + (5x^0 - 40^0) = 180^0$

या, $3x^0 + 2x^0 + 5x^0 + 20^0 - 40^0 = 180^0$

या, $10x^0 - 20^0 = 180^0$

या, $10x^0 = 180^0 + 20^0$

या, $10x^0 = 200^0$

या, $x^0 = 20^0$

अत: त्रिभुज के तीनों अन्त: कोण क्रमश:

$3x^0 = 3 \times 20^0 = 60^0$

$(2x + 20^0) = 2 \times 20^0 + 20^0 = 40^0 + 20^0 = 60^0$

$(5x - 40)^0 = 5 \times 20^0 - 40^0 = 100^0 - 40^0 = 60^0$

त्रिभुज के तीनों अन्त: कोण बराबर हैं। अत: यह एक समबाहु त्रिभुज है।

उदाहरण 11 :एक मालगाड़ी 40 किमी प्रति घंटे की चाल से 9 बजे प्रात: एक स्टेशन से निकली। एक डाकगाड़ी ने, जो 10 बजे प्रात: उसी स्टेशन से निकली, उस मालगाड़ी को दिन में एक अन्य स्टेशन पर 12 बजे पकड़ लिया। डाकगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : मालगाड़ी की चाल = 40 किमी प्रति घंटा

अत: 9बजे से 12 बजे तक अर्थात्3 घंटे में मालगाड़ी द्वारा चलित

दूरी = 3×40 किमी

=120 किमी

मान लीजिए कि डाकगाड़ी की चाल=xकिमी प्रति घंटा। अत:

10 बजे से दिन में 12 बजे तक अर्थात् 2 घंटे में चली दूरी =2x

प्रश्नानुसार,$2x = 120$

या, $\frac{2x}{2} = \frac{120}{2}$

या, $x = 60$

अत: डाकगाड़ी की चाल =60 किमी प्रति घंटा

सत्यापन : मालगाड़ी द्वारा 9बजे से 12 बजे तक चली दूरी=3×40 किमी

=120 किमी

डाकगाड़ी द्वारा 10 बजे से 12 बजे तक चली दूरी= 2×60 किमी

=120 किमी

अत: डाकगाड़ी, मालगाड़ी को 12 बजे पकड़ लेगी क्योंकि दोनों गाड़ियों द्वारा 12 बजे तक चली दूरियाँ बराबर हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि दैनिक जीवन से संबंधित निम्नलिखित प्रकार के प्रश्नों को समीकरण द्वारा सरलता से हल किया जा सकता है।

1.संख्या सम्बन्धी

2.आयु सम्बन्धी

3.ज्यामिति सम्बन्धी

4.समय, दूरी और चाल सम्बन्धी

5.अन्य प्रश्न

समीकरणों को हल करने में निम्नलिखित प्रक्रिया को अपनाते हैं :

• हम समस्या को सावधानीपूर्वक पढ़कर पता लगाते हैं कि क्या ज्ञात करना है तथा क्या ज्ञात है।

• अज्ञात राशि कों x,y,z या किसी अक्षर संख्या से व्यक्त करते हैं।

• यथा सम्भव प्रश्नमें दिये गये प्रत्येक शाब्दिक कथन को गणितीय कथन का रूप दे देते हैं।

• हम उन राशियों को खोजते हैं जो आपस में समान हों और फिर राशियों के स्थान पर उपर्युक्त व्यंजक लिखकर समीकरण बनाते हैं।

• तत्पश्चात् समीकरण को अज्ञात राशि के लिए हल करते हैं।

• अन्त में उत्तर की जाँच करते हैं कि प्राप्त हल प्रश्नमें दिये हुए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है अथवा नहीं।

संक्षेप में हम सबसे पहले समस्याओं को समीकरण के रूप में व्यक्त कर लेते हैं। तत्पश्चात् समीकरण हल करके समस्या का समाधान करते हैं।

निम्नलिखित उदाहरणों में दैनिक जीवन से सम्बन्धित कुछ प्रश्नों को समीकरण द्वारा हल किया गया है।

• संख्या सम्बन्धी वार्तिक प्रश्न:

उदाहरण 12:यदि दो क्रमागत संख्याओं का योगफल 7 है, तो उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि पहली संख्या=x

इसलिए क्रमागत दूसरी संख्या= $x + 1$

दोनों क्रमागत संख्याओं का योग = $x + x + 1$

$= 2x + 1$

अत: प्रश्नानुसार,

$2x + 1 = 7$

या, $2x = 7 - 1$

या, $2x = 6$

या, $x = \frac{6}{2}$

या, $x = 3$

पहली संख्या = 3

दूसरी संख्या =3+1=4

सत्यापन : दोनों क्रमागत संख्याओं का योग = 3+4=7

दिया गया योगफल

अत: हल सही है।

भास्कराचार्य प्रथम

ये सौराष्ट्र के निवासी थे तथा आर्यभट की शिष्य परम्परा के अनमोल मोती थे। इन्होंने आर्यभट के आर्यभटीय (499 ई.) ग्रन्थ पर 629 ई. में टीका लिखी थी। इनके महाभास्करीय और लघुभास्करीय दो ग्रन्थ हैं। इन्होंने महाभास्करीय ग्रन्थ में ज्योतिष सम्बन्धी प्रश्नों में आने वाले एक घातीय समीकरणों के हल दिये हैं।

उदाहरण 13 :दो क्रमागत सम संख्याओं का योगफल 10 है, संख्याएँ बताइए।

हल : मान लीजिए कि प्रथम सम संख्या =2x

अत: दूसरी क्रमागत सम संख्या = $2x + 2$

दोनों क्रमागत सम संख्याओं का योग = $2x + 2x + 2$

अत: प्रश्नानुसार :

$2x + 2x + 2 = 10$

या, $4x = 10 – 2$ (2 का पक्षान्तर करने पर)

या, $4x = 8$

या, $x = \frac{8}{4}$ (4 से दोनों पक्षों में भाग देने पर)

या, $x = 2$

पहली सम संख्या = $2x = 2 \times 2 = 4$

तथा दूसरी सम संख्या = $2x + 2 = 2 \times 2 + 2 = 6$

सत्यापन : दोनों क्रमागत सम संख्याओं का योग=4+6=10

=दिया गया योगफल

अत: हल सही है।

विशेष :ध्यान दें,

(i) ......, $2x – 3$, $2x – 1$, $2x + 1$, $2x + 3$, ..., क्रमागत विषम संख्याएँ हैं।

(ii) ...., $2x – 4$, $2x – 2$, $2x$, $2x + 2$, $2x + 4$, ...,क्रमागत सम संख्याएँ हैं।

उदाहरण 14 नेहा, आदर्श एवं रजिया के पास क्रमश: 2y, (2y+ 1) एवं (3y – 2) रुपये हैं। यदि तीनों के पास मिलाकर कुल 27 रुपये हों, तो आदर्श के पास कितने रुपये हैं ?

हल : नेहा के पास रुपयों की संख्या = $2y$

आदर्श के पास रुपयों की संख्या = $2y + 1$

रजिया के पास रुपयों की संख्या = $3y – 2$

तीनों के पास मिलाकर कुल रुपयों की संख्या = $2y + 2y + 1 + 3y – 2$

$= 7y – 1$

अत: प्रश्नानुसार,

$7y – 1 = 27$

या, $7y = 27 + 1$ ... (–1 का पक्षान्तर करने पर)

या, $7y = 28$

या, $y = \frac{28}{7}$ (दोनों पक्षों में 7 से भाग देने पर)

या, $y = 4$

आदर्श के रुपये = $(2y + 1)$ रुपये

= $(2 \times 4 + 1)$ रुपये

= 9 रुपये

अत: आदर्श के पास 9 रुपये हैं।

उदाहरण 15 : प्रबोध कुमार ने अपनी सम्पत्ति का $\frac{1}{3}$ भाग अपने पुत्र को, $\frac{1}{5}$ भाग अपनी पुत्री को तथा शेष भाग अपनी पत्नी को दिया। यदि पत्नी के भाग का मूल्य रु0 42,000 हो, तो प्रबोध कुमार के पास कितने रुपये की सम्पत्ति थी ?

हल : मान लीजिए प्रबोध कुमार के पास x रुपये मूल्य की सम्पत्ति थी,

पुत्र का भागर का $\frac{1}{3} = \frac{-7}{5}$

तथा पुत्री का भाग x का $\frac{1}{5} = \frac{x}{5}$

पत्नी का भाग= शेष भाग

$= x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{5}\right)$

$= x - \frac{x}{3} - \frac{x}{5}$

अत: प्रश्नानुसार, $x - \frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 42000$

या, $\frac{15x - 5x - 3x}{15} = 42000$

या, $\frac{7x}{15} = 42000$

या, $x = 42000 \times \frac{15}{7}$ .... ($\frac{15}{7}$ से दोनों पक्षों में गुणा करने पर)

या, $x = 90{,}000$

अत: प्रबोध कुमार के पास रु0 90,000 की सम्पत्ति थी।

अभ्यास 6 (c)

1.सही विकल्प चुनिए :

(a) किसी संख्र्या xऔर 7 का गुणनफल 28 है, तो वह संख्या है :

(i) 5 **(ii)** – 4 **(iii)** 4 **(iv)** 7

(b) किसी संख्र्या x में 5 से भाग देने पर भागफल 7 आता है, तो वह संख्या है :

(i) 5 **(ii)** 2 **(iii)** 35 **(iv)** 7

(c) यदि एक विषम संख्या 2x +1 है, तो दूसरी क्रमागत विषम संख्या होगी :

(i) $2x + 2$ **(ii)** $2x + 3$ **(iii)** $2x$ **(iv)** $x + 1$

2.कुछ गणितीय कथनों को रेखीय समीकरणों के रूप में अभिव्यक्त किया गया है। सही समीकरणों को छाँटिए :

(a) किसी धनात्मक संख्या के दो-तिहाई और एक-तिहाई में अन्तर 7 है :

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x = 7$$

(b) किन्हीं दो क्रमागत संख्याओं का योगफल 27 है : $\boldsymbol{x + (x + 1) = 27}$

(c) किसी संख्या के दूने में 8 जोड़ने पर योगफल 50 है : $2y + 8 = 50$

(d) किसी संख्या के दो-तिहाई में 17 जोड़ने पर योगफल 19 प्राप्त होता है :

3. एक संख्या का $\frac{1}{2}$, उसी संख्या के $\frac{1}{4}$ से 15 अधिक है, संख्या ज्ञात कीजिए।

4. एक संख्या 7 से 4 बड़ी है, वह संख्या बताइए।

5. एक कक्षा में 45 विद्यार्थी हैं। यदि छात्रों की संख्या छात्राओं की $\frac{2}{3}$हो, तो छात्राओं की संख्या बताइए।

6. एक संख्या के $\frac{1}{3}$ भाग में से उसका $\frac{1}{4}$ भाग घ:ाने पर 4 शेष है। संख्या बताइए।

7. आदर्श, डेविड और हमीद का कुल भार 44 किलोग्राम है। यदि डेविड का भार आदर्श के भार से 1.3 किग्रा अधिक एवं हमीद के भार से 2.1 किग्रा अधिक हो, तो तीनों का अलग-अलग भार ज्ञात कीजिए।
8. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योगफल 4 है। यदि दहाई के अंक से इकाई का अंक घटा दिया जाय, तो शेष 2 है। संख्या ज्ञात कीजिए।
9. दो क्रमागत संख्याओं का योगफल 21 है। उन संख्याओं को बताइए।
10. दो क्रमागत सम संख्याओं का योगफल 30 है। उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए।
11. दो क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल 40 है। उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए।
12. एक भिन्न संख्या का हर 7 है। यदि उसके अंश और हर दोनों में 7 जोड़ दिया जाय, तो उस भिन्न का मान हो जाता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

आयु सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण 16 :सुनील की आयु उसकी बहन आशा की आयु से 10 वर्ष अधिक है। यदि 5 वर्ष पूर्व सुनील की आयु आशा की आयु की दोगुनी रही हो, तो दोनों की वर्तमान आयु अलग-अलग ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि सुनील की वर्तमान आयु=x वर्ष

आशा की आयु= $(x - 10)$ वर्ष

5 वर्ष पहले सुनील का आयु= $(x - 5)$ वर्ष

तथा 5 वर्ष पहले आशा की आयु= $(x - 10 - 5)$ वर्ष

= $(x - 15)$ वर्ष

अत: प्रश्नानुसार

$(x - 5) = (x - 15)\ \ 2$

या, $x - 5 = 2x - 30$

या, $x - 2x = - 30 + 5$

या, $- x = -25$

या, $x = 25$

सुनील की वर्तमान आयु =25 वर्ष

तथा आशा की वर्तमान आयु = 25-10 =15 वर्ष

उत्तर की जाँच : प्रथम शर्त के लिए : द्वितीय शर्त के लिए :

सुनील की आयु – आशा की आयु दोनों की 5 वर्ष पहले की आयु

(25 – 15) वर्ष ==10 वर्ष=क्रमश: (25-5) वर्ष तथा (15 – 5) वर्ष

=क्रमश: 20 वर्ष तथा 10 वर्ष

सुनील की आयु, आशा की आयु की 20/10 = 2 गुनी है।

प्राप्त हल प्रश्नके दोनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है।

अत: हल सही है।

उदाहरण 17:सलमा अपनी बहन रेशमा से 10 वर्ष बड़ी है। 4 वर्ष पहले सलमा की आयु रेशमा की दो गुनी थी। सलमा और रेशमा की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि रेशमा की वर्तमान आयु=X वर्ष

इसलिए सलमा की वर्तमान आयु = $(x + 10)$ वर्ष

4 वर्ष पहले रेशमा की आयु= $(x – 4)$ वर्ष

4 वर्ष पहले सलमा की आयु= $(x + 10 – 4)$ वर्ष

= $(x + 6)$ वर्ष

अत: प्रश्नानुसार

$(x + 6) = 2 (x – 4)$

या, $x + 6 = 2x – 8$

या, $x – 2x = – 8 – 6$

या, $–x = –14$

$\therefore x = 14$

रेशमा की आयु =14 वर्ष

तथा सलमा की आयु =(14 + 10) = 24 वर्ष

सत्यापन : प्रथम शर्त वेâ लिए द्वितीय शर्त के लिए

सलमा की आयु – रेशमा की आयु

=(24 – 14) वर्ष दोनों की 4 वर्ष पहले की आयु

=10 वर्ष=(24 – 4) वर्ष तथा (14 – 4) वर्ष

= 20 वर्ष तथा 10 वर्ष

सलमा की आयु रेशमा की आयु की $\frac{20}{10}$ अर्थात् दो गुनी थी।

प्राप्त हल प्रश्नके दोनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है।

अत: हल सही है।

अभ्यास 6 (d)

1. माँ की आयु उसके पुत्र की आयु की 5 गुनी है। 8 वर्ष पश्चात् माँ पुत्र की आयु से 3 गुनी हो जायेगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

2. अब्दुल अपने पिता से 25 वर्ष छोटा है। यदि 10 वर्ष पूर्व पिता की उम्र अब्दुल की उम्र की छ: गुनी रही हो, तो अब्दुल की वर्तमान उम्र क्या है ?

3. माँ की उम्र पिता की उम्र से 5 वर्ष कम है। 10 वर्ष पूर्व दोनों की उम्र का अनुपात 5 : 6 था। माँ की वर्तमान उम्र बताइए।

4. माया अपने 5 वर्ष के बच्चे से इस समय 20 वर्ष बड़ी है। अब से कितने वर्ष पश्चात् उसकी उम्र बच्चे की उम्र की 3 गुनी हो जायेगी ?

ज्यामिति सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण 18 :एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाएँ (2x + 3) सेमी एवं (4x – 1) सेमी की है। यदि तीसरी भुजा (3x – 2) सेमी की हो,र्तो x का मान ज्ञात कीजिए तथा त्रिभुज का परिमाप बताइए।

हल : प्रश्नानुसार $2x + 3 = 4x - 1$

या, $2x - 4x = -1 - 3$

या, $-2x = -4$

या, $\frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2}$

या, $x = 2$

$\therefore$ त्रिभुज की पहली भुजा= $(2x + 3)$ सेमी ==$(2 \times 2 + 3)$ सेमी = 7 सेमी = दूसरी समान भुजा

तीसरी भुजा = $(3x – 2)$ सेमी = $(3 \times 2 – 2)$ सेमी ==4 सेमी

त्रिभुज का परिमाप = $(7 + 7 + 4)$ सेमी

=18 सेमी

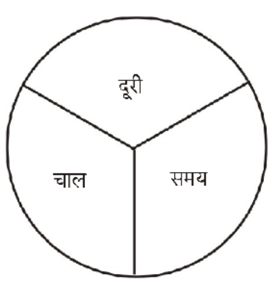
अभ्यास 6(e)

1. एक समकोण त्रिभुज के दो न्यूनकोणों का अनुपात 7 : 11 है। कोणों के मान ज्ञात कीजिए।
2. दो कोटिपूरक कोणों का अन्तर 200 है। प्रत्येक कोण की माप बताइए।
3. दो सम्पूरक कोणों का अन्तर 400 है। प्रत्येक कोण की माप क्या है ?
4. एक आयताकार मैदान 190 मीटर लम्बे तार से घिरा है। यदि मैदान की लम्बाई उसकी चौड़ाई की डेढ़ गुनी हो,तो मैदान की लम्बाई और चौड़ाई अलग-अलग ज्ञात कीजिए।

समय, दूरी एवं चाल सम्बन्धी प्रश्न

समय, दूरी एवं चाल से सम्बन्धित समस्याओं को हल करते

समय निम्नांकित सूत्रों का प्रयोग करते हैं।



1. दूरी =चाल × समय

2. चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

3.समय= $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

•दूरी, चाल एवं समय की इकाईयों को किमी, किमी प्रति घंटा और घंटा के रूप में अथवा मीटर, मी प्रति सेकंड और सेकंड के रूप में रखकर प्रश्न हल करते हैं। ऐसा न होने पर इकाई परिवर्तन कर लेते हैं।

1 किमी = 1000मी अथवा 1 मीटर = $\frac{1}{1000}$ किमी

1 किमी प्रति घंटा = $\frac{5}{18}$ मीटर प्रति सेकंड अथवा 1 मीटर प्रति सेकंड - $\frac{18}{5}$ किमी प्रति घंटा

1 घंटा =3600 सेकंड अथवा 1 सेकंड = $\frac{1}{3600}$ घंटा

उदाहरण 19 :एक रेलगाड़ी जिसकी लम्बाई 270 मीटर है, एक खम्भे को 9सेकंड में पार कर लेती है। उसकी चाल किमी प्रति घंटा में ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि उसकी चाल =xमी प्रति सेकंड

रेलगाड़ी अपनी लम्बाई के बराबर दूरी 9 सेकंड में तय करती है।

अत: प्रश्नानुसार

$x \times 9 = 270$ .... (दूरी =चाल × समय)

या, $x \times \frac{9}{9} = \frac{270}{9}$

या, $x = 30$

रेलगाड़ी की चाल = 30 मी प्रति सेकण्ड

= $\frac{30 \times 18}{5}$ किमी/घंटा

= 108 किमी/घंटा

उदाहरण 20 :एकस्कूटर यात्री यदि 24 किमी प्रति घंटा से स्कूटर चलाता है, तो वह नियत स्थान पर समय से 5 मिनट देर पहुँचता है और यदि वह 30 किमी प्रति घंटे की चाल से चलता है तो नियत स्थान पर समय से 4 मिनट पहले पहुँच जाता है। नियत स्थान की दूरी बताइए।

हल : मान लीजिए कि यात्रा की कुल नियत दूरी = xकिमी

समय 5 मिनट = $\frac{5}{60}$ घंटा = $\frac{1}{12}$ घंटा

तथा समय 4 मिनट $= \frac{4}{60}$ घंटा $= \frac{1}{15}$ घंटा

समय= $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

x किमी की दूरी 24 किमी प्रति घंटे की चाल से तय करने में लगे समय $= \frac{x}{24}$ घंटा

प्रश्नानुसार समान चाल से चलने पर नियत स्थान पर पहुँचने का सही समय= $\left(\frac{x}{24} - \frac{1}{12}\right)$ घंटा

इसी प्रकार

x किमी की दूरी 30 किमी प्रति घंटे की चाल से तय करने में लगे समय $= \frac{x}{30}$ घंटा

प्रश्नानुसार समान चाल से चलने पर नियत स्थान पर पहुँचने का सही समय= $\left(\frac{x}{30} + \frac{1}{15}\right)$ घंटा

उपर्युक्त दोनों स्थितियों से प्राप्त सही समयों को बराबर करने पर

$$\frac{x}{24} - \frac{1}{12} = \frac{x}{30} + \frac{1}{15}$$

या, $\frac{x}{24} - \frac{x}{30} = \frac{1}{15} + \frac{1}{12}$

या, $\frac{5x - 4x}{120} = \frac{4+5}{60}$

या, $\frac{x}{120} = \frac{9}{60}$

या, $\frac{x}{120} = \frac{3}{20}$

या, $x = \frac{3}{20} \times 120$

या, $x = 18$ अत: नियत स्थान की दूरी 18 किमी है।

अभ्यास 6(f)

1. एक मालगाड़ी जिसकी लम्बाई 450 मीटर है, एक खम्भे को 18 सेकंड में पार करती है। उस मालगाड़ी की चाल किमी प्रति घंटा में ज्ञात कीजिए।

2. 1.3 किमी दूर खड़े आदर्श को एक गोले के फटने की आवाज उसके फटने से 4 सेकंड बाद सुनायी पड़ी। 0वनि की चाल मीटर प्रति सेकंड में ज्ञात कीजिए।

3. एक व्यक्ति 15 किमी की दूरी 3 घंटे में तय करता है जिसमें कुछ दूरी टहलते हुए तथा शेष दूरी दौड़कर तय करता है। यदि उसकी चाल टहलने में 3 किमी प्रति घंटा तथा दौड़ने में 9 किमी प्रति घंटा रही हो, तो उसने दौड़कर कितनी दूरी तय की थी ?

4. नसरीन घर से 3 किमी प्रति घंटा की चाल से विद्यालय जाती है और 4 किमी प्रति घंटा की चाल से वापस आती है। यदि उसे आने-जाने में कुल21 मिनट लगे, तो उसके घर से विद्यालय कितनी दूर है ?

5. संजय साइकिल द्वारा 01 किमी प्रति घंटा की चाल से कार्यालय 6 मिनट विलम्ब से पहुँचा। यदि वह अपनी चाल 2 किमी प्रति घंटा बढ़ा देता, तो वह 6 मिनट पहले पहुँच जाता है। उसके घर से कार्यालय की दूरी ज्ञात कीजिए।

6. हामिद के घर से डेविड का घर 19 किमी दूर है। प्रात: 9 बजे वे एक दूसरे के घर के लिए साइकिल द्वारा प्रस्थान करते हैं। यदि हामिद की चाल 9 किमी प्रति घंटा और डेविड की चाल 10 किमी प्रति घंटा हो तो, वे दोनों हामिद के घर से कितनी दूरी पर तथा कब मिलेंगे ?

7. सरकार द्वारा अनाथालय के बच्चों को पुष्टाहार देने के लिए 200 ग्राम दलिया प्रति बच्चे की दर से वितरित किया गया। यदि कुल20 किग्रा दलिया वितरित हुआ हो तो बच्चों की संख्या कितनी थी।

8. पन्द्रह अगस्त के उपलक्ष्य में एक स्कूल के बच्चों में कुर्लx किग्रा सेब वितरित हुआ। सेब का मूल्य स् रुपये प्रति किग्रा था। फल व्यापारी ने राष्ट्रीय पर्व के सम्मान में 10 रुपया प्रतिकिग्रा मूल्य कम लिया। सेब का कुल मूल्य 2000 रुपये की भुगतान राशि को समीकरण द्वारा दर्शाइए।

दक्षता अभ्यास 6

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $\frac{1}{3}x + 5 = 6$

(b) $0.6 - 1.2\,x + 3 = -3$

(c) $\frac{3}{7}x - 5 = 3 - \frac{x}{7}$

(d) $3(5x - 7) + 2(9x - 11) = 4(8x - 7) - 5$

2. किसी संख्या के5 गुने से उसका 3 गुना घटाने पर शेषफल 18 है। वह संख्या बताइए।

3. दो क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल उनके अन्तर का 6 गुना है। उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

4. एक व्यक्ति एक बाग से कुछ फूल चुनता है। वह इन फूलों का $\frac{1}{2}$ भाग माली को, $\frac{1}{4}$ भाग फूलदान के लिए, $\frac{1}{6}$ भाग अपने पुत्र को, $\frac{1}{18}$ भाग अपनी पुत्री को तथा शेष 1 फूल अपनी पत्नी को भेंट करता है। उसने कुल कितने फूल चुने थे ?

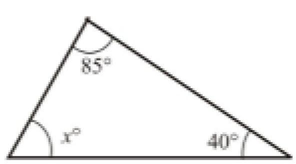
5. रबिया और एबी की उम्र में 2 वर्षों का अन्तर है। यदि रबिया की उम्र एबी की उम्र के 2 गुने में 6 वर्ष कम हो, तो दोनों की उम्र ज्ञात कीजिए।

6. पिता की उम्र उसके पुत्र की आयु की 4 गुनी है। 6 वर्ष बाद पिता की आयु पुत्र की आयु के ढाई गुने से 6 वर्ष अधिक हो जायगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

7. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 5 सेमी अधिक है। यदि उसका परिमाप 26 सेमी हो, तो उसकी लम्बाई ज्ञात कीजिए।

8. एक समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा $(2x - 1)$ सेमी तथा उसके सामने की भुजा $(4x - 6)$ सेमी है। भुजा की माप बताइए।

9. पाशर्वांकित चित्र में x का मान ज्ञात कीजिए।



10. एक महिला साइकिल से $(4x + 1)$ किमी की दूरी 5 घंटे में तय करती है। यदि उसकी चाल $(x - 2)$ किमी प्रति घंटा हो, तो तय की गयी दूरी ज्ञात कीजिए।

11. एक लड़की $2\frac{1}{2}$ घंटे में 20 किमी दूरी तय करती है। यदि उसने 5 किमी प्रति घंटा की चाल से कुछ दूरी पैदल चलकर और शेष दूरी को 10 किमी प्रति घंटा की चाल से साइकिल द्वारा तय की हो, तो उसके द्वारा पैदल चली गई दूरी ज्ञात कीजिए।

12. जब माधव 12 किमी प्रति घंटा की चाल से विद्यालय जाता है, तो वह 3 मिनट विलम्ब से पहुँचता है। किन्तु जब वह 16 किमी प्रति घटा की चाल से विद्यालय जाता है, तो वह 2मिनट पहले पहुँचता है। उसके घर से विद्यालय की दूरी ज्ञात कीजिए।

एम.एस.ई

13. दो संख्याओं का योगफल 710 है। जब बड़ी संख्या को छोटी संख्या से भाग दिया जाता है तो भागफल 12 और शेषफल 8 आता है। तो बड़ी संख्या होगी। (2009)

(क)566 (ख) 656

(ग) 665 (घ) 654

14. यदि $2y + z = 17$, $2z + x = 15$ और $2x + y = 10$ तो $x + y + z$ का मान होगा

(क) 42 (ख) 39

(ग) 41 (घ) 14

15. समीकरण $\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}+\frac{x-a-b}{c}=3$ को हल करने पर x का मान प्राप्त होता है।

i. (a - b + c) ii. (a + b + c)

iii. (a + b - c) iv. (b + c - a)

इस इकाई में हमने क्या सीखा ?

1.समीकरण चर पर एक प्रतिबन्ध है, जिसमें दोनों पक्षों में व्यंजकों का मान सदैव बराबर होता है। समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या के जोड़ने, घटाने, गुणा करने अथवा शून्येतर संख्या से भाग देने पर समीकरण के संतुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

2.किसी कथन को समीकरण के रूप में निरूपित करने की विधा की जानकारी दी गई है।

3. (i) किसी भी समीकरण को हल करने के लिए किसी संख्या का दोनों पक्षों में यथास्थिति जोड़, घटाना, गुणा एवं भाग करके चर का मान ज्ञात करते हैं।

(ii) समीकरण को शीघ्रता से हल करने के लिए समीकरण के एक पक्ष या आंशिक भाग को दूसरे पक्ष में स्थानान्तरित कर समीकरण को हल करते हैं।

4.व्यावहारिक समस्याओं पर आधारित अज्ञात राशियों को चर के रूप में मानकर ज्ञात राशियों से सम्बन्ध स्थापित कर समीकरण कर समीकरण का रूप देते हैं तथा उसका हल ज्ञात करते हैं। ये व्यावहारिक समस्याएँ मुख्यत: संख्या सम्बन्धी, आयु सम्बन्धी, ज्यामिति, समय, दूरी और चाल सम्बन्धी हैं।

ेशेष

ह्मगुप्त

दक्षिण राजस्थान के नगर भीलमान में इनका जन्म 598 ई. में हुआ। ब्रह्मगुप्त का कार्यकाल हर्षवर्धन के शासन काल के समकालीन था। इन्होंने उज्जयिनी (ग्वालियर) में रहकर अपनी अमर कृतियाँ लिखी एवं और गणित तथा ज्योतिष विषयक अनेक महत्वपूर्ण कार्य किये। बीजगणित में शून्य का उपयोग करने वाले ब्रह्मगुप्त पहले गणितज्ञ हैं।

इनके प्रसिद्ध ग्रन्थ ब्राह्मस्पुâट में अंकगणित, बीजगणित और ज्यामिति के अनेक सूत्र दिये गये हैं। अंकगणितीय भाग में घनमूल, गुणन की चार विधियाँ, वर्ग, घन, भिन्न, अनुपात, ब्याज, शून्य, अनन्त की व्याख्या की गई है।

उत्तरमाला

अभ्यास 6 (a)

1. (i) 3, (ii) 3, (iii) 4, (iv) 6, (v) 3; **2.** (i) 33, (ii) 6, (iii) 12, (iv) 24 ; **3.** (i) 18, (ii) 25, (iii) 2, (iv) 5; **4.** (i) –7, (ii) 3, (iii) 5, (iv) 18.3; **5.** (i) 6.5, (ii) 12, (iii) 2/3, (iv) $-\frac{9}{26}$, (v) $\frac{5}{3}$

अभ्यास 6 (d)

1. 4/7, **2.(i)** -29/25, **(ii)** -13/9, **(iii)** -9/13; **3.** 7/10

अभ्यास 6 (c)

1. (a) 4, (b) 35, (c) $2x + 3$; **2.** (a) नहीं है, (b) है, (c) है, (d) है; **3.** 60; **4.** 11; **5.** 27; **6.** 48;

7. 14.5 किग्रा, 15.8 किग्रा, 13.7 किग्रा; **8.** 31; **9.** 10, 11; **10.** 14, 16; **11.** 19, 21; **12.** $\frac{5}{7}$

अभ्यास 6 (d)

1. 40, 8; **2.** 15 **3.** 35; **4.** 5 वर्ष

अभ्यास 6 (e)

1. 35^0, 55^0; **2.** 35^0, 55^0; **3.** 70^0, 110^0; **4.** 57 मी, 38 मी

अभ्यास 6 (f)

1. 90 किमी प्रति घटा; **2.** 325 मी/सेकण्ड; **3.** 9 किमी; **4.** 0.6 किमी; **5.** 12 किमी; **6.** 9 किमी, 10 बजे **7.** 100बच्चे, **8.** x (m - 10) = *2000*

दक्षता अभ्यास 6

1. (a) 3, (b) 5.5 (c) 14, (d) 10; **2.** 9; **3.** 5, 7; **4.** 36 फूल; **5.** 10 वर्ष, 8 वर्ष; **6.** 40 वर्ष, 10वर्ष;

7. 9सेमी; **8.** 4सेमी; **9.** 55^0; **10.** 45 किमी; **11.** 5 किमी; **12.** 4 किमी **13.** (ख) 656 **14.** (घ) 14

इकाई - 7 वाणिज्य गणित

AZUI8Y

- **समानुपात**
- **अनुलोम और प्रतिलोम समानुपात**
- **प्रतिशतता का अनुप्रयोग (लाभ, हानि, बट्टा, आयकर, बिक्रीकर, साधारण ब्याज)**
- **चक्रवृद्धि ब्याज का अर्थ**
- **ऐकिक नियम द्वारा चक्रवृद्धि मिश्रधन एवं चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करना**
- **चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र तथा उसका अनुप्रयोग**
- **कर(Tax) एवं कर के प्रकार**

7.1 भूमिका

समानुपात क्या है तथा इसके विभिन्न पदों के पारस्परिक सम्बंधों के विषय में हम पिछली कक्षा में विस्तार से अध्ययन कर चुके हैं। यदि चार समानुपाती राशियाँ दी गयी हो, जिनमें एक राशि अज्ञात हो, तो अज्ञात राशि का मान ज्ञात करना भी जानते हैं।

प्रतिशतता राशियों की तुलना करने की एक विधि है। प्रतिशतता से संख्याओं का अनुपात ज्ञात करना, अनुपात से प्रतिशत ज्ञात करना, वृद्धि या घटने को प्रतिशत रूप में ज्ञात करना, लाभ-हानि प्रतिशत ज्ञात करना आदि प्रतिशतता के अनेक रोचक एवं व्यवहारपरक अनुप्रयोग हैं। ब्याज पर भी ब्याज लेने की अवधारणा चक्रवृद्धि ब्याज है। पहले वर्ष के अन्त में साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज समान होते हैं।

रीना ने कक्षा 6 की परीक्षा में पूर्णांक 500 में से 250 अंक प्राप्त किये तथा कक्षा 7 की परीक्षा में वह पूर्णांक 700 में से350 अंक पाती है, समानुपात नियम का अंक प्रयोग करके बताइऐ कि दोनों प्राप्तांक समान हैं या भिन्न।

हम जानते हैं कि यदि दो अनुपात समान हों, तो वे समानुपात कहलाते हैं। जैसे $\frac{5}{10} = 1:2$ और $\frac{4}{8} = 1:2$ तो हम कह सकते हैं कि अनुपात $\frac{5}{10}$ और $\frac{4}{8}$ अनुपात समान हैं इस सम्बन्ध को समानुपात कहते हैं। इस समानुपातिक सम्बन्ध को निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं :

$\frac{5}{10} = \frac{4}{8}$ या 5 : 10 = 4 : 8

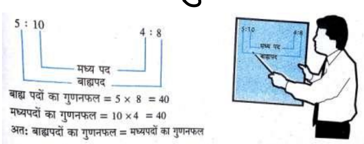
किसी समानुपात में चार पद होते हैं , प्रथम और अंतिम पदों को बाह्यपद तथा मध्य के दोनों पदों को मध्यपद कहते हैं। बाह्य पद और मध्य पद में एक विशेष प्रगुण अथवा विशेषता होती है जिसे निम्नवत् समझा जा सकता है :

5 : 10 = 4 : 8 में कुल चार पद हैं।

जैसे:5 : 10 4 : 8

बाह्य पदों का गुणनफल =5× 8= 40

मध्यपदों का गुणनफल = 10 × 4= 40



अत: बाह्यपदों का गुणनफल = मध्यपदों का गुणनफल

7.2.1 अनुलोम समानुपात (Direct proportion)

हम जानते हैं कि यदि दो अनुपात समान हों तो वे समानुपात कहलाते हैं। इसे हम निम्नलिखित उदाहरण के माध्यम से समझ सकते हैं। 5 पुस्तकों का मूल्य 100.00 है तो 15 पुस्तकों का मूल्य 300.00 और 3 पुस्तकों का मूल्य 60.00 होगा।

ध्यान दीजिए :

पुस्तकों की संख्या पहले की तीन गुनी (5 से 15) हो जाने पर उनका मूल्य भी पहले मूल्य का तीन गुना अर्थात् 300 हो जाता है। यहाँ स्पष्ट है कि पुस्तक की संख्या बढ़ने पर उनके

कुल मूल्यों में उसी अनुपात में वृद्धि होती है और पुस्तकों की संख्या कम करने पर उनके कुल मूल्यों में उसी अनुपात में कमी होती है।

इस प्रकार के समानुपात को सीधा समानुपात या अनुलोम समानुपात कहते हैं। दैनिक जीवन में इसका अनुप्रयोग बहुलता से किया जाता है।

हल : निम्नांकित सारणी में पेंसिलों की संख्या को ' x' तथा पेंसिलों के मूल्य को 'y' रुपये से प्रर्दिशत किया गया है। इसे ध्यान से देखकर निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

पेंसिलों की संख्या x	18	36	54	72	90
पेंसिलों का मूल्य रुपयों में y	20	40	60	80	100
$\frac{x}{y}$	$\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$	$\frac{36}{40}=\frac{9}{10}$	$\frac{54}{60}=\frac{9}{10}$	$\frac{72}{80}=\frac{9}{10}$	$\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$

(i)पेंसिलों की संख्या 18 की दो गुनी होने पर, उनका मूल्य कितने गुना हो जाता है ?

(ii)पेंसिलों की संख्या 18की तीन गुनी होने पर, उनका मूल्य कितने गुना हो जाता है ?

हम देखते हैं कि:

(i) पेंसिलों की संख्या दो गुनी होने पर, उनका संगत मूल्य भी दो गुना हो जाता है ।

(ii) पेंसिलों की संख्या तीन गुनी हो जाने पर, उनका संगत मूल्य भी तीन गुना हो जाता है ।

(i) तथा (ii) से हम देखते हैं कि पेंसिलों की संख्या में जिस अनुपात में वृद्धि हो रही है उसी अनुपात में उनके मूल्यों में भी वृद्धि हो रही है। जैसे :

$$\frac{36 \text{ पेन्सिल}}{54 \text{ पेन्सिल}} = \frac{40 \text{ रुपये}}{60 \text{ रुपये}}$$

या 36 : 54 :: 40 : 60

36पेंसिलों 54 पेंसिलों , 40 रुपये, 60 रुपये अनुलोम समानुपात में हैं।

अत: हम कह सकते हैं कि पेंसिलों की संख्या और उनके मूल्य में अनुलोम समानुपात का संबंध है।

इसी प्रकार 54 पेंसिलों और 72 पेंसिलों तथा 60 रुपये और 80 रुपये अनुलोम समानुपात में हैं, अर्थात्

$$\frac{54 \text{ पेन्सिल}}{72 \text{ पेन्सिल}} = \frac{60 \text{ रुपये}}{80 \text{ रुपये}}$$

या, 54 : 72 :: 60 : 80

(iii) सारणी को देखकर हम यह कह सकते हैं कि $\frac{\text{पेन्सिलों की संख्या}}{\text{पेन्सिलों का मूल्य}}$ यानि $\frac{x}{y}$ का मान प्रत्येक स्थिति में $\frac{9}{10}$ अर्थात् समान है। अत: $\frac{x}{y}$ का मान अचर है। इसे हम $\frac{x}{y}=k$ भी कह सकते हैं।

उदाहरण 1 : नीचे दी गई सारणी में क्रमश: गेदों की संख्या और उनके संगत मूल्य प्रर्दिशत हैं:

गेंदों की संख्या x	4	3	2	1
रुपयों में मूल्य y	20	15	10	5
$\frac{x}{y}$	$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$	$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

सारणी देखकर बताइए :

(i) गेंदों का मूल्य 20 रुपये हैं, 2गेंदों का मूल्य कितना है ?

(ii) इसी दर से 1 गेंद का मूल्य कितना है ?

हम देखते हैं कि 2 गेंदों की संख्या, 4 गेंदों की संख्या की आधी है और उसका संगत मूल्य भी 20 रुपये का आधा 10 रुपये है। इसी प्रकार 1 गेंद 4 गेंदों की संख्या की चौथाई है। अत: 1 गेंद का मूल्य भी 20 रुपये का चौथाई =5 रुपये होगा।

इस प्रकार जैसे-जैसे गेंदों की संख्या घ:ती है, संगत मूल्य में भी उसी अनुपात में कमी आ जाती है। इस संबंध को अनुलोम संबंध कहते हैं। यहाँ 4 गेंद, 2 गेंद, 20 रुपये, 10 रुपये अनुलोम समानुपात में हैं, अर्थात्

$$\frac{4 \text{ गेंद}}{2 \text{ गेंद}} = \frac{20 \text{ रुपये}}{10 \text{ रुपये}}$$

या, 4 : 2 :: 20 : 10

उपर्युक्त सारणी से भी यह स्पष्ट है कि $\frac{x}{y}=\frac{1}{5}$ अचर है अर्थात् $\frac{x}{y}=k$

प्रयास कीजिए :

1. 2किलोग्राम आलू का मूल्य 20 रुपये है। 4 किलोग्राम आलू का मूल्य बताइए।

2. एक मजदूर एक दिन में 3 मीटर लम्बी दीवार तैयार करता है। 3 मजदूर एक ही दिन में कितने मीटर लम्बी दीवार बनायेंगे ?

अ**त: निष्कर्ष निकलता है कि:**

1. जब दो राशियाँ x और y इस प्रकार से संबंधित हों कि x के बढ़ने पर, दूसरी राशि y में उसी अनुपात में वृद्धि हो अथर्वा x के घटने पर y में भी उसी अनुपात में कमी हो तो ये राशियाँ 'अनुलोम समानुपाती' कहलाती हैं।

2. $\frac{x}{y}$ का मान दोनों स्थितियों में अचर होता है।

अनुलोम समानुपात का संबंध तीरों को एक ही दिशा में लगाकर (↓) निम्नलिखित ढंग से व्यक्त कर सकते हैं:

(1)

पेंसिलों की संख्या	पेंसिलों का मूल्य (रुपयों में)
10 ↓	9 ↓
20	18

अर्थात् 10 : 20 :: 9 : 18

(2)

गेंदों की संख्या	गेंदों का मूल्य (रुपयों में)
4 ↓	20 ↓
2	10

अर्थात् 4 : 2 :: 20 : 10

उदाहरण 2: एक रेलगाड़ी 2 घंटे में 120 किमी दूरी तय करती है। उसी चाल से वह 5 घंटे में कितनी दूरी तय करेगी?

हल : समय की अधिकता के साथ तय की गई दूरी भी अधिक होगी, अत: यहाँ अनुलोम समानुपात का संबंध है। मान लिया 5 घंटे में x किमी दूरी तय होगी।

अत:

समय (घंटे में)	तय की गई दूरी (किमी में)
2 ↓	120 ↓
5	x

अर्थात् 2 : 5 :: 120 : x

या, $2x = 5 \times 120$

$\therefore x = \frac{5 \times 120}{2} = 300$

अभीष्ट दूरी = 300 किमी

उदाहरण 3.25 मजदूर एक सप्ताह में 7.5 किमी लम्बी सड़क बनाते हैं। कितने मजदूर उतने ही समय में 10.2 किमी लम्बी सड़क बना लेंगे ?

हल : सड़क की लम्बाई और मजदूरों की संख्या में अनुलोम समानुपात का संबंध है।

मान लिया 10किमी.2 लम्बी सड़र्क x मजदूर बना लेंगे।

सड़क की लम्बाई (किमी में)	मजदूरों की संख्या
7.5 ↓	25 ↓
10.2	x

अर्थात् 7.5 : 10.2 :: 25 : x

या, $7.5x = 10.2 \times 25$

या, $x = \frac{10.2}{7.5} \times 25$

या, $x = \frac{102 \times 25}{75}$

या, $x = 34$

मजदूरों की अभीष्ट संख्या = 34

उदाहरण 4:यदि 6 कलमों का मूल्य 24 है, तो 7 कलमों का मूल्य कितना होगा ?

हल : कलमों की संख्या और उनके संगत मूल्य में अनुलोम समानुपात का संबंध है।

मान लिया 7 कलमों का मूल्य x होगा।

कलमों की संख्या	मूल्य (रुपयों में)
6 ↓	24 ↓
7	x

अर्थात् 6 : 7 :: 24 : x

या, $6x = 7 \times 24$

या, $x =$

अभीष्ट मूल्य 28रुपये है।

प्रयास कीजिए :

1. कुछ मजदूर किसी काम को 4 दिनों में पूरा करते हैं। वही मजदूर 1 दिन में कितना कार्य पूरा करेंगे और कितना कार्य शेष रहेगा ?
2. 20 किमी प्रतिघंटा चलने से 120 किमी की दूरी चलने में कितना समय लगेगा?

अभ्यास 7 (a)

1. निम्नांकित सारणी को अभ्यास पुस्तिका में उतार कर व् का मान लिखिए :

x	20	40	60	80
y	40	80	120	160
$k = \frac{x}{y}$				

निम्नांकित प्रश्न 2 और 3 में उत्तर के 4 विकल्प दिए गए हैं। सही विकल्प बताइए :

2.4 किलोग्राम चाय का मूल्य 420 रुपये है। 12 किलोग्राम चाय का मूल्य होगा :

(a) ₹1000 **(b)** ₹760 **(c)** ₹1160 **(d)** ₹1260

3. 30मी/सेकन्ड की चाल किमी/घंटा में होगी :

(a) 300 सेकन्ड/घंटा **(b)** 13 सेकन्ड/घंटा **(c)** 108 सेकन्ड/घंटा **(d)** 30 सेकन्ड/घंटा

4. निम्नांकित अनुलोम समानुपाती सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए :

मजदूरों की संख्या x	1	2	.....	4	5
मजदूरी (रुपये में) y	50	...	150	200	...

5. 6 कलमों का मूल्य 24 है, 10 कलमों का मूल्य बताइए।

6.5 मजदूरों की मजदूरी 1250 है। 9 मजदूरों के लिए कितनी मजदूरी चाहिए ?

7.4 गेंद या 3 कलमों का मूल्य 12 हो, तो 6 गेंद और 6 कलमों का मूल्य बताइए।

8.एक मशीन 5 मिनट में 200 पन्नें छापती है। इसी प्रकार 2 ×130पन्नों को छापने में कितना समय लगेगा?

9. एक परिवार के $4\frac{1}{2}$ यूनिट के राशन कार्ड पर 36 किलोग्राम गेहूँ मिलता है, $3\frac{1}{2}$ यूनिट के राशनकार्ड पर कितना गेहूँ मिलेगा ?

10. एक रेलगाड़ी 315मीटर लम्बी है। 54 किमी प्रति घंटा की चाल से वह एक खंभे को कितने समय में पार करेगी?

7.2.2 प्रतिलोम समानुपात (INVERSE PROPORTION)

व्यावहारिक जीवन में नित्य के क्रिया कलाप में आप यह देखते हैं कि कभी-कभी एक राशि के बढ़ने पर दूसरी

राशि उसी अनुपात में घट जाती है। आइए इसे हम एक उदाहरण द्वारा समझते हैं। 5मजदूर किसी मकान की

सफेदी 10 दिन में करते हैं। तो 10 मजदूर उसी काम को कितने दिन में करेंगे ?

सोचिए मजदूरों की संख्या 5 से 10 हो गयी अर्थात् मजदूरों की संख्या दो गुनी कर दी गयी तो सफेदी करने में

लगे दिनों की संख्या निश्चित रूप से कम होगी और दिनों की संख्या पहले के दिनों की आधी होगी।

यहाँ हम देखते हैं कि जिस अनुपात में मजदूरों की संख्या को बढ़ाते हैं उसी अनुपात में दिनों की संख्या में कमी

होती जाती है। इस प्रकार के समानुपात को प्रतिलोम समानुपात (उल्टा समानुपात) कहते हैं।

उदाहरण 5: एक विद्य़ालय के विज्ञान भवन की सफेदी कराने के लिए आवश्यक श्रमिकों की संख्या तथा दिनों की संख्या निम्नांकित सारणी में दी हुई है :

श्रमिकों की संख्या x	2	4	8
दिनों की संख्या y	20	10	5
x × y	2×20=40	4×10=40	8×5=40

2 श्रमिक सफेदी का काम 20 दिनों में पूरा कर सकते हैं। सफेदी के काम पर 4 श्रमिक लगाने से काम केवल 10 दिनों में पूरा हो सकता है। स्पष्ट है कि श्रमिकों की संख्या दो गुनी होने पर दिनों की संख्या पहले की आधी अर्थात् 10 हो जाती है। इसी प्रकार श्रमिकों की संख्या 8 होने पर, काम 5 दिनों में पूरा हो सकता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि श्रमिकों की संख्या जिस अनुपात में बदलती है, ठीक उसके विलोम (उल्टे) या प्रतिलोम अनुपात में दिनों की संख्या भी बदल जाती है। यहाँ हम यह भी देखते हैं कि :

$x \times y$ का मान प्रत्येक स्थिति में 40 है अर्थात $x \times y$ का मान अचर है।

अत: हम कह सकते हैं कि किसी काम को पूरा करने के लिए आवश्यक श्रमिकों एवं दिनों की संख्या में प्रतिलोम संबंध है और चार पद जैसे 2 श्रमिक, 4 श्रमिक,20 दिन, 10 दिन प्रतिलोम समानुपात में है ; अर्थात्

$\frac{2}{4} = \frac{20}{10}$ का प्रतिलोम अनुपात

या, $\frac{2}{4} = \frac{10}{20}$

या, 2 : 4 :: 10 : 20

इसी प्रकार 8श्रमिक, 4 श्रमिक,5 दिन, 10 दिन में प्रतिलोम समानुपात का संबंध होने के कारण 5 : 10 को उलटकर (प्रतिलोम के रूप में) निम्नलिखित ढंग से लिखते हैं :

$\frac{8}{4} = \frac{5}{10}$ का प्रतिलोम अनुपात

या, $\frac{8}{4} = \frac{10}{5}$

या, 8 : 4 :: 10 : 5

अर्थात्

जब चार राशियाँ प्रतिलोम समानुपात में होती हैं तब अन्त की दो राशियों के अनुपात को उलट कर (विलोम के रूप में) लिखा जाता है।

निम्नांकित सारणी में पानी से भरे एक तालाब में से पानी निकालने के लिए लगाई गई पंपिंग मशीन की संख्या तथा खाली करने के लिए अपेक्षित समय का विवरण दिया गया है :

पंपिंग मशीनों की संख्या x	5	10	15	20	30
तालाब खाली करने में लगा समय (घंटेy)	60	30	20	15	10
$x \times y$	5×60=300	10×30=300	15×20=300	20×15=300	30×10=300

(i) 5 पंपिंग मशीन एक तालाब को 60 घंटे में खाली कर सकती है। मशीनों की संख्या दूनी होने से घंटों की संख्या में क्या अनुपात होगा ?

(ii) यदि पंपिंग मशीनों की संख्या तीन गुनी हो जाय, तो घंटों की संख्या में क्या अनुपात होगा ?

आप देखते हैं कि मशीनों की संख्या 5 से 10 (अनुपात 1 : 2) होने पर लगने वाला समय पहले से आधा अर्थात् 60 घंटे से 30 घंटे हो जाता है और अनुपात 2 : 1 हो जाता है।

इसी प्रकार मशीनों की संख्या 5 के स्थान पर 15 (अनुपात 1 : 3) होने से अपेक्षित घंटों की संख्या 60 घंटे से उसकी तिहाई 20 घंटे (अनुपात 3 : 1) हो जाती है। अर्थात्

5 : 15 = 1 : 3 और 60 : 20 = 3 : 1

यहाँ आप यह भी देखते हैं कि x:y का मान प्रत्येक स्थिति में 300 है अर्थात $x\times y$ का मान अचर है।

सारणी की अन्य आनुपातिक राशियों को देखने से ज्ञात होता है कि पंपिंग मशीनों की संख्या जिस अनुपात में बदलती है, उसी के प्रतिलोम अनुपात में घंटों की संख्या बदलती है। अत: पंपिंग मशीनों की संख्या और घंटों की संख्या में प्रतिलोम समानुपात का संबंध है। 5 मशीन, 10 मशीन, 60 घंटे, 30 घंटे के प्रतिलोम समानुपाती संबंध को निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं :

$\frac{5}{10} = \frac{60}{30}$ का प्रतिलोम अनुपात

$$\frac{5}{10} = \frac{30}{60}$$

या,

या, 5 : 10 :: 30 : 60

प्रतिलोम समानुपात का संबंध तीरों द्वारा निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है :

पंपिंग मशीनों की संख्या	अपेक्षित समय (घंटे में)
5 ↓	60 ↑
10	30

उदाहरण 6 : निम्नांकित सारणी कोध्यान से पढ़िए, सोचिए और नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

श्रमिकों की संख्या x	2	4	8	16	32
दिनों की संख्या y	32	16	8	4	2
$x \times y$					

(i) x के मान जैसे-जैसे बढ़ते हैं, y के संगत मान वैसे-वैसे बढ़ते हैं या घटते हैं ?

(ii)जब y का मान 16 से 8 अर्थात् आधा हो जाता है तर्ब x का मान 4 से 8 अर्थात् दूना हो जाता है। यदि x का मान 8 से 16 अर्थात् दो गुना हो जाय तो y का संगत मान क्या होगा ?

iii) $x \times y$ के मान बताइए और देखिए कि क्या मान प्रत्येक स्थिति में बराबर है ?

उदाहरण 7 : निम्नांकित सारणी से k का मान ज्ञात कीजिए : :

पंपिंग सेट x	2	3	4	5	6
समय (घंटों में) y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$k = x \times y$					

उपर्युक्त उदाहरणों (1) और (2) से स्पष्ट होता है कि श्रमिकों की संख्या 2 से 4 अर्थात् दो गुनी होने पर दिनों की संख्या 32 से 16 अर्थात् आधी $\left(\frac{1}{2}\right)$ और पम्पसे: की संख्या 2 से 3 अर्थात् 2 : 3 होने पर अपेक्षित संगत समय $\frac{1}{2}$ से $\frac{1}{3}$ अर्थात् 2:3या 3 : 2 अर्थात् 2 : 3 का प्रतिलोम 3 : 2 हो जाता है।

अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि :

1. जब दो राशिया ँx और y इस प्रकार से संबंधित हों कि x किसी अनुपात में बदलने पर y उसी के प्रतिलोम अनुपात में बदलती हो तथा $x \times y = k$ जहाँ k अचर हो तो वे राशियाँ प्रतिलोम समानुपाती कहलाती हैं।

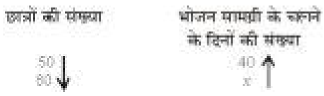
2. प्रतिलोम समानुपाती की दोनों राशियों को विपरीत दिशाओं में इंगित करने वाले तीरों (↓, ↑) से प्रर्दिशत कर लेने से प्रश्नों को हल करने में सुविधा होती है।

उदाहरण 8: एक छात्रावास में 50 छात्रों के लिए 40 दिनों की भोजन सामग्री है। यदि छात्रावास में 30 छात्र और आ जाएं तो भोजन सामग्री कितने दिनों में समाप्त हो जाएगी ?

हल : 30 छात्रों के और आ जाने से छात्रावास के छात्रों की संख्या = 50 + 30 =80

निश्चित भोजन सामग्री को कम छात्र अधिक दिनों में तथा अधिक छात्र कम दिनों में समाप्त करेंगे। अत: इस प्रश्नमें भोजन सामग्री और छात्र संख्या के बीच प्रतिलोम समानुपाती संबंध है।

मान लिया भोजन सामग्री x दिनों में समाप्त हो जाएगी।



अर्थात्

50 : 80 :: x : 40

या, 80x = 50 ×40

या, $x = \frac{50 \times 40}{80}$

या, x = 25

अभीष्ट दिनों की संख्या = 25

उदाहरण 9:एक कार 30 किमी प्रति घंटे की चाल से कोई दूरी 3 घंटे में तय करती है, उसी दूरी को दूसरी कार जिसकी चाल 40 किमी प्रति घंटा है, कितने समय में तय करेगी ?

हल : चाल और समय में प्रतिलोम समानुपात है। मान लिया उसी दूरी को दूसरी कार x घंटे में तय करेगी।

अत: 30 : 40 :: x : 3

या, 40x = 30 × 3

या, $x = \frac{30 \times 3}{40}$

या, $x = \frac{9}{4}$ या, $x = 2\frac{1}{4}$

या, x = 2 घंटा 15 मिनट अभीष्ट समय = 2 घंटा 15 मिनट

उदाहरण 10:12 मजदूर एक दीवार को 10 दिन में बना सकते हैं, उसी दीवार को 6 दिन में बनाने के लिए कितने मजदूरों की आवश्यकता होगी ?

हल : समय और मजदूरों की संख्याएँ प्रतिलोम समानुपात में हैं। मान लिर्या xमजदूरों कीआवश्यकता होगी।

समय (दिन में)	मजदूरों की संख्या
10 ↓	12 ↑
6	x

अत: 10 : 6 : : x : 12

या, $6x = 10 \times 12$

या, $x = \frac{10 \times 12}{6}$

या, $x = 20$

अभीष्ट मजदूरों की संख्या =20

उदाहरण 11:12 गायें या 9 भैसें एक चारागाह की घास 10 दिन में चर सकती हैं तो 3 गायें और 3 भैसें उस को कितने दिन में चर सकेगी ?

हल : 12 गायों का चरना =9 भैसों का चरना

$\therefore$ 1 गाय का चरना = $\frac{8}{12}$ भैसों का चरना

$\therefore$ 3 गायों का चरना = $\frac{8 \times 3}{12}$ भैसों का चरना==2 भैसों का चरना

(3 गायें =3 भैसों) का चरना =(2 भैसें = 3 भैसों) का चरना = 5 भैसों का चरना

मान लिर्या x दिन में उक्त भैसें घास चर लेंगी।

भैसें	दिन
8 ↓	10 ↑
5	x

अत: 8 : 5 :: x : 10

या, $5x = 8 \times 10$

या, $x = \frac{8 \times 10}{5}$

या, $x = 16$

अभीष्ट दिनों की संख्या =16

आइए निम्नलिखित प्रश्नों पर भी विचार करें :

1.शारदा 15 साल की और उसकी मां 45 साल की है। जब शारदा 30 साल की हो जाएगी, उसकी मां कितने साल की होगी ?

2.गोविन्दु ने धूप में सूखने के लिए पहले 4 कमीजों को फैलाया और महेन्द्र ने वैसी ही 20 कमीजों को सूखने के लिए फैलाया। यदि गोविन्दुकी 4 कमीजों के सूखने में 2 घंटे का समय लगा हो तो महेन्द्र की 20 कमीजों के सूखने में कितना समय लगेगा?

सोचिए

1.आप सोच चुके होंगे कि शारदा 15 साल की बढ़त पा कर 30 साल की हो जाती है तो उसकी माँ के लिए भी तो यही समय (15 वर्ष) मिलेगा और वह भी 45 + 15 =60 वर्ष की हो जाएगी।

2.4 कमीजों के सूखने में 2 घंटे लगते हैं तो 20 कमीजों के सूखने में 5 गुना अर्थात् $2 \times 5 = 10$ घंटे ही लगना चाहिए। सोचिए यह कहना सही नहीं जान पड़ता, क्यों? कमीजें एक प्रकार की हैं, अत: सूखने में एक ही समय लगेगा और वह होगा 2 घंटे।

प्रयास कीजिए :

1. 10 मजदूर किसी काम को 2 दिन में कर सकते हैं। उसी काम को 2 मजदूर कितने दिन में कर सकेंगे?

2. एक स्थान से दूसरे स्थान तक 100 ईंटों को ले जाने में एक मजदूर को 1 घंटा लगता है। यदि दो मजदूर

इटों की ढुलाई प्रारंभ करें तो उतनी ही ईंटें ढोने में उन्हें कितना समय लगेगा ?

3. एक साइकिल चालक कोई दूरी 15 किमी प्रति घंटा की चाल से 4 घंटे में तय करता है। वह उसी दूरी को

12 किमी प्रति घंटा की चाल से कितने समय में तय करेगा ?

4. यदि 7 आदमी एक काम को 15 दिन में करते हों, तो 21 आदमी उसी काम को कितने दिन में करेंगे?

अभ्यास 7 (b)

1. शीला 12 किमी प्रति घंटा की चाल से अपनी साइकिल द्वारा अपने घर से पाठशाला 20 मिनट में

पहुँचती है। उसे 15 मिनट में पहुँचने के लिए किस चाल से साइकिल चलाना होगा ?

2. 48 किमी प्रति घंटा की चाल से चलकर एक कार किसी दूरी को 10 घंटे में तय करती है। उसी दूरी को

मात्र 8 घंटे में तय करने के लिए कार की चाल क्या होगी ?

3. सुनीता प्रति दिन 4 घंटे बुनाई करके 8 दिन में एक स्वेटर पूरा करती है। यदि 6 दिन में स्वेटर पूरा

करना हो, तो प्रतिदिन उसे कितने घंटे बुनना होगा ?

4. 6 मजदूर एक कमरा 7 दिन में बना सकते हैं। 21 मजदूर उसे कितने दिन में बना सकेंगे ?

5. 45 आदमी एक काम को 27 दिन में पूरा करते हैं। यदि 81 आदमी उसी काम में लगाये जायें तो कितने

दिन में पूरा करेंगे ?

6. एक मोटर कार एक स्थान से दूसरे स्थान तक 40 किमी प्रति घंटा की चाल से चलकर 3 घंटे में पहुँचती

है। यदि वह 30 किमी प्रति घंटा की चाल से चले तो वह कितने घंटे में पहुँचेगी ?

7. एक किले में 700 ग्राम प्रतिदिन प्रति सिपाही के हिसाब से 42 दिन का भोजन है। यदि प्रतिदिन का

भोजन 600 ग्राम प्रति सिपाही कर दिया जाय, तो भोजन कितने दिनों के लिए पर्याप्त होगा ?

8. जब एक नल एक घंटे में 640 लीटर पानी भरता है तो एक जलकुंड को भरने में 10 घंटे का समय

लगता है। यदि उसी जलकुंड को दूसरे नल से 8 घंटे में भरा गया हो तो दूसरे नल से प्रति घंटा कितना पानी

भरा?

9. एक छात्रावास में 300 छात्रों के लिए 15 दिनों की राशन सामग्री उपलब्ध है। यदि अवकाश के कारण

200 छात्र बाहर चले जायें तो वह सामग्री कितने दिन तक चलेगी ?

10. 40 किमी प्रति घंटा की चाल से एक टैम्पो 5 घंटे में एक यात्री को उसके नियत स्थान पर पहुँचा देती है।

यदि उस टैम्पो की चाल प्रति घंटा 25 किमी होती तो वह उस यात्री को कितने घंटे में पहुँचा पाती?

11. 2 कुशल श्रमिक या 3 श्रमिक एक काम को 20 दिन में कर सकते हैं। 6 कुशल श्रमिक और एक श्रमिक

उसी काम को कितने दिनों में कर सकेंगे?

12. एक चींटी की लम्बाई 4 मिमी तथा एक टिड्डे की लम्बाई 4 सेमी है। टिड्डे और चींटी की लम्बाई में

अनुपात बताइए। घर में पायी जाने वाली छिपकली की लम्बाई 20 सेमी और नदियों में पाये जाने वाले

मगरमच्छ की लम्बाई 4 मी है। मगरमच्छ और छिपकली की लम्बाई में क्या अनुपात है ? क्या टिड्डे और

चींटीं की लम्बाई का अनुपात, मगरमच्छ और छिपकली की लम्बाई का अनुपात, समानुपात में है?

7.3 प्रतिशतता के अनुप्रयोग

हम प्रतिशत के अनुप्रयोग से सम्बन्धित लाभ-हानि, साधारण ब्याज और दैनिक जीवन से सम्बन्धित सामान्य

प्रश्न हल करना जानते हैं। यहाँ हम लाभ-हानि, आयकर, बट्टा और साधारण ब्याज के विविध प्रश्नों पर

प्रतिशतता का प्रयोग करना सीखेंगे।

•हरीश ने गणित में 20 में से 15 अंक और विज्ञान में 25 में से 20 अंक प्राप्त किए।

(i) हरीश ने गणित में कितने प्रतिशत अंक प्राप्त किए ?

(ii) हरीश ने विज्ञान में कितने प्रतिशत अंक प्राप्त किए ?

(iii) हरीश ने किस विषय में अधिक अच्छे अंक प्राप्त किए ?

हम देखते हैं कि,

(i) गणित में प्राप्तांक = $\frac{15 \times 100}{20} \times \frac{1}{100}$

$= 75 \times \frac{1}{100} = 75\%$

(ii) विज्ञान में प्राप्तांक $= \frac{20 \times 100}{25} \times \frac{1}{100}$

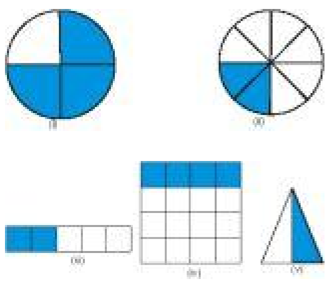
$= 80 \times \frac{1}{100} = 80\% \left(\frac{1}{100} = \%\right)$

(iii) हरीश ने विज्ञान में अधिक अच्छे अंक प्राप्त किए।

उदाहरण 12:नीचे दिए गये चित्रों को देखकर बताइए कि रंगा हुआ भाग सम्पूर्ण भाग का कौन सा प्रतिशत है ?

हल : चित्र (i) में रेखांकित भाग $= \frac{3}{4} = \frac{3 \times 100}{4 \times 100} = \frac{75}{100} = 75\%$

चित्र (ii) में रेखांकित भाग $= \frac{2}{8} = \frac{2}{8} \times \frac{100}{100} = \frac{25}{100} = 25\ \%$



चित्र (iii) में रेखांकित भाग $= \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{100}{100} = \frac{40}{100} = 40\ \%$

चित्र (iv) में रेखांकित भाग $= \frac{4}{16} = \frac{4}{16} \times \frac{100}{100} = \frac{25}{100} = 25\ \%$

चित्र (v) में रेखांकित भाग $= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{100}{100} = \frac{50}{100} = 50\%$

उदाहरण 13: यदि किसी धन राशि का 15%, 45 रुपये हो, तो वह राशि ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया कि वह राशि x रुपये है।

अत: x का 15% = 45

या $\frac{x \times 15}{100} = 45$

$x = \frac{45 \times 100}{15} = 300$

अत: अभीष्ट धनराशि =300 रुपये

उदाहरण 14:एक गाँव की जनसंख्या 750 है। यदि उनमें से 50 व्यक्ति निरक्षर हों, तो गाँव में साक्षरता का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल : गाँव में साक्षर व्यक्ति =कुल व्यक्ति – निरक्षर व्यक्ति

= 750 – 50

= 700

गाँव में साक्षरता का प्रतिशत $= \frac{700 \times 100}{750 \times 100} = 93.33\%$

गाँव में साक्षरता =93.33%

उदाहरण 15: राजेश अपने वेतन का 15% मकान किराया, 30% खाद्य सामग्री और 20% बच्चों की शिक्षा पर व्यय करता है। यदि उसका मासिक वेतन 7500 रुपये हो, तो मकान किराया, खाद्य सामग्री और बच्चों की शिक्षा पर अलग-अलग व्यय ज्ञात कीजिए। राजेश की मासिक बचत भी बताइए?

हल : राजेश का मकान किराया=वेतन का 15%

= 7500 रुपये का 15%

= = ₹ $\frac{7500 \times 15}{100}$

= 1125

खाद्य सामग्री पर व्यय=वेतन का 30%

= 7500 रुपये का 30%

= ₹ $\frac{7500 \times 30}{100}$

= ₹2250

बच्चों की शिक्षा पर व्यय = वेतन का 20%

= 7500 रुपये का 20%

= ₹ $\frac{7500 \times 20}{100}$

= ₹ 1500

कुल मासिक बचत= 7500 रुपये – (1125 + 2250 + 1500) रुपये = 2625

उदाहरण 16:जर्मन सिल्वर में 50% ताँबा, 35% जस्ता और शेष निकिल होता है। यदि जर्मन सिल्वर के एक टुकड़े में निकिल की मात्रा 7.5 ग्राम हो, तो उस टुकड़े की कुल मात्रा ज्ञात कीजिए।

हल : निकिल = 100% – (50 + 35)% = 15%

प्रश्नानुसार निकिल की मात्रा = 7.5 ग्राम

टुकड़े की कुल मात्रा का 15% = 7.5 ग्राम

टुकड़े की कुल मात्रा का $\times \frac{15}{100} = 7.5$ ग्राम

टुकड़े की कुल मात्रा का = $\frac{7.5 \times 100}{15}$ ग्राम = 50 ग्राम

अत: जर्मन सिल्वर के टुकड़े की मात्रा=50 ग्राम

उदाहरण 17:यदि किसी परीक्षा में विज्ञान में कुल40% और अंग्रेजी में कुल 35% विद्यार्थी अनुत्तीर्ण हों और दोनों विषयों में 15% अनुत्तीर्ण हों, तो दोनों विषयों में कितने प्रतिशत विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए? यदि कुल उत्तीर्ण होने वाले विद्र्यिाथयों की संख्या 240 हो, तो परीक्षा में कुल कितने विद्यार्थी बैठे थे?

हल :

विज्ञान में कुल अनुत्तीर्ण विद्यार्थी 40%

अंग्रेजी में कुल अनुत्तीर्ण विद्यार्थी =35%

दोनों विषयों में अनुत्तीर्ण विद्यार्थी=15%

केवल विज्ञान में अनुत्तीर्ण विद्यार्थी=(40–15)% = 25%

केवल अंग्रेजी में अनुत्तीर्ण विद्यार्थी= (35 – 15)% = 20%

कुल अनुत्तीर्ण विद्यार्थी=(15 + 25 + 20) = 60%

अत: दोनों विषयों में कुल उत्तीर्ण विद्यार्थी= 100% – 60% = 40%

प्रश्नानुसार दोनों विषयों में कुल उत्तीर्ण विद्यार्थी= 240

अत: कुल विद्र्यिाथयों का 40% = 240

$\frac{\text{कुल विद्यार्थी} \times 40}{100} = 240$

कुल विद्यार्थी = $\frac{240 \times 100}{40} = 600$,अत: परीक्षा में कुल 600 विद्यार्थी बैठे थे।

अभ्यास 7 (c)

1. वह राशि ज्ञात कीजिए जिसका :

(i) 35% = 280 (ii) $\frac{3}{5}\% = 90$ (iii) 0.25% = 600

2.किसी राशि का 5%,600 रुपये के 15% के बराबर है। वह राशि ज्ञात कीजिए।

3.एक चुनाव में 7500 मतदाताओं में से 20% मतदाताओं ने मत नहीं डाले। ज्ञात कीजिए कुल कितने लोगों ने मत डाले।

4.खड़िया में 40% कैलशियम, 12% कार्बन, और 48% ऑक्सीजन है। 1 किग्रा खड़िया में प्रत्येक की मात्रा ग्राम में बताइए।

5.एक गाँव की जनसंख्या 1200 है। इसमें 40% पुरुष,30% स्त्रियाँ और शेष बच्चे हैं। तीनों की अलग-अलग संख्या ज्ञात कीजिए।

6.एक मिश्रण में 20% लोहा, 38% रेत और शेष काँच है। यदि मिश्रण में काँच की मात्रा 168 ग्राम हो, तो मिश्रण की कुल मात्रा बताइए।

7.वार्षिक परीक्षा में गणित में कुल42%, अंग्रेजी में कुल 32% विद्यार्थी अनुत्तीर्ण हुए। यदि 12 % विद्यार्थी दोनों विषयों में अनुत्तीर्ण हुए, तो कितने प्रतिशत विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए। यदि कुल उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों की संख्या760 हो, तो परीक्षा में कुल कितने विद्यार्थी बैठे थे ?

8.एक गाँव की आबादी 4000 है। इनमें से 500 लोग दूषित जल के प्रयोग से पीलिया से पीड़ित हैं। गाँव में पीलिया रोग से कितने प्रतिशत लोग पीड़ित हैं।

7.3.1 लाभ-हानि

पिछली कक्षा में हम लोगों ने लाभ-हानि क्या है ? कब लाभ और कब हानि होती है? लाभ और हानि को ज्ञात करने वाले सूत्रों के सम्बन्ध में अध्ययन कर चुके हैं। इसके अतिरिक्त दैनिक जीवन से सम्बन्धित इबारती प्रश्नों द्वारा प्रतिशत लाभ तथा प्रतिशत हानि ज्ञात

करना सीख चुके हैं। आइए अब हम प्रतिशतता के अनुप्रयोग से सम्बन्धित लाभ हानि के विविध आयामों को समझें।

लाभ की स्थिति में

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

विक्रय मूल्य =क्रय मूल्य + लाभ

क्रय मूल्य =विक्रय मूल्य – लाभ

प्रतिशत लाभ = $\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$

हानि की स्थिति में

हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि

क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य + हानि

हानि प्रतिशत ¯ = $\frac{\text{हानि} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$

उदाहरण 18: एक दुकानदार एक सिलाई मशीन 850 में खरीदकर 1020 में बेचता है। ज्ञात कीजिये कि

दूकानदार को कितने प्रतिशत लाभ हुआ।

हल : क्रय मूल्य=850

विक्रय मूल्य=1020

लाभ =विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

= ₹ 1020 – ₹ 850

= ₹ 170

लाभ - प्रतिशत = $\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$

$= 170 \times \frac{100}{850} = 20$

अत: लाभ = 20%

विक्रय-मूल्य ज्ञात करना :

उदाहरण 19: रमेश ने एक साइकिल 1200 रुपये में खरीदी और 25% लाभ पर बेच दी। उसका

विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : साइकिल का क्रय मूल्य =1200

लाभ =1200 का25%

$= ₹ 1200 \times \frac{25}{100}$

= ₹ 300

साइकिल का विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ

= ₹ 1200 + ₹ 300

= ₹ 1500

प्रयास कीजिए :

(1) एक फूलदान का लागत मूल्य 180रुपये है। यदि दुकानदार को इसे10% हानि से बेचना पड़े तब उसका

विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

(2) एक वस्तु 60 रुपये में क्रय की गई तथा 20 प्रतिशत लाभ पर बेची दी गई। उसका विक्रय मूल्य ज्ञात

कीजिए।

उदाहरण 20: एक व्यापारी ने 10 क्विंटल गेहूँ 100 रुपये प्रति क्विं:ल के भाव से खरीदा। गेहूँ में घुन लग जाने

के कारण उसको की हानि में $8\frac{4}{5}\%$ बेचना पड़ा। गेहूँ का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : 10 क्विंटल गेहूँ का क्रय मूल्य= ₹ 10×1000

= ₹ 10000

हानि= 10000 का $8\frac{4}{5}\%$

$= ₹\ 10000$ का $\frac{4}{5}\%$

$= ₹\ \frac{10000 \times 4}{5 \times 100}$

= 880 रुपये

गेहूँ का विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि

= ₹ 10000 – 880 हानि

= ₹ 9120

क्रय-मूल्य ज्ञात करना :

उदाहरण 21दिनेश एक घड़ी को 360 रुपये में बेचकर 20% लाभ कमाता है। घड़ी का क्रय मूल्य ज्ञात

कीजिए।

हल : माना घड़ी का क्रय मूल्य= ₹ 100

लाभ=20

घड़ी का विक्रय मूल्य =क्रय मूल्य + लाभ

= ₹ 100 + ₹ 20

= ₹ 120

चूँकि विक्रय मूल्य 120 है, तो क्रय मूल्य = ₹ 100

विक्रय मूल्य 1 रुपया है, तो क्रय मूल्य = $= ₹\ \frac{100}{120}$

विक्रय मूल्य 360 रुपये है, तो क्रय मूल्य $= ₹\ \frac{100 \times 360}{120}$

= ₹300

अत: घड़ी का क्रय मूल्य = ₹ 300

प्रयास कीजिए :

1.एक घड़ी ₹४०० `में खरीदी गयी तथा लाभ 10% पर बेच दी गयी , तो उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

२.यदि ₹१०० की वस्तु ` १२० में बेची जाय,तो कितने प्रतिशत लाभ या हानि होगी?

३.एक किताब ₹८० में खरीदी गई किन्तु ` ६० में बेची गयी । कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई ?

अभ्यास 7 (d)

1. मोहन ने एक टेलीविजन सेट 10200 में खरीदकर दो वर्ष बाद 11730 रुपये में बेच दिया। उसे कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई ?

2. एक व्यापारी ने दस बैल 30,000 में खरीदे और यदि उसे 2400 रुपये प्रति बैल के हिसाब से उन्हें बेचना पड़ा। उसका प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

3. एक फर्नीचर विक्रेता एक आलमारी 5,000 में खरीदकर 2130.ज्हु लाभ ले कर राकेश को बेचता है। राकेश ने वह आलमारी कितने रुपये में खरीदी ?

4. एक व्यापारी ने 15 क्विंटल गेहूँ 980 प्रति क्विंटल के भाव से खरीदा। गेहूँ में घुन लग जाने के कारण उसको 5% की हानि से बेचना पड़ा। गेहूँ का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

5. एक कलम को 21 में बेचने से 5% का लाभ होता है। उसका क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. श्याम ने अपना ट्रांजिस्टर सेट खराब होने के कारण 1280 में 20% की हानि पर बेच दिया। इस ट्रांजिस्टर सेट का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

7. एक दूध वाले ने अपनी दो गायों को ₹ 20,000 में प्रति गाय की दर से बेंचा। एक गाय पर उसे 5% लाभ और दूसरी पर 10% हानि हुई। इस सौदे में उसका कुल लाभ या कुल हानि बताइए।

7.3.2 बढ़त या घटत, प्रतिशत रूप में

अनेक अवसरों पर हमें किसी राशि पर हुई बढ़त या घटत को प्रतिशत में ज्ञात करने कीआवश्यकता होती है।

उदाहरण के लिए किसी गाँव की जनसंख्या 5260 से बढ़कर 6312 हो गई तब ऐसी स्थिति में जनसंख्या की

बढ़त को प्रतिशत के रूप में समझना सरल होता है। जैसे कि कहें कि य हाँ गाँव की जनसंख्या में 20^3 वृद्धि हो

गई।

हम किसी राशि के बढ़ने या घटने को कुल राशि के रूप में किस प्रकार प्रकट कर सकते हैं? आइए

निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 22 : एक विद्यालय की क्रिकेट टीम ने इस वर्ष 10 में से 8 खेलों में जीत प्राप्त की जबकि पिछले वर्ष

10 में से 6 में ही जीत प्राप्त की थी। पिछले वर्ष की तुलना में जीत कितने प्रतिशत बढ़ी?

हल : जीत की संख्या में बढ़त = 8 – 6 = 2

प्रतिशत बढ़त $= \frac{\text{वृद्धि}}{\text{पिछले वर्ष की जीत}} \times 100$

$= \frac{\text{जीत की संख्या में वृद्धि}}{\text{पिछले वर्ष में जीत की संख्या}} \times 100$

$= \frac{2}{6} \times 100$

प्रतिशत बढ़त = $33\frac{1}{3}$ अर्थात् जीत में $33\frac{1}{3}$% की बढ़त हुई।

उदाहरण 23 : किसी अस्पताल में सन् 2005 में मलेरिया के 600 रोगी भर्ती हुए और सन् 2006 में केवल 400 रोगी भर्ती हुए। सन् 2005 की तुलना में सन् 2006 में रोगियों की संख्या में बढ़त हुई या घटत और तो कितने प्रतिशत?

हल : प्रारम्भ में अर्थात् 2005 में रोगियों की संख्या =600

प्रारम्भिक संख्या में परिवर्तन =रोगियों की संख्या में घटत =600 – 400 =200

अत: प्रतिशत घटत = $\frac{\text{राशि में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक राशि}} \times 100$

$= \frac{200}{600} \times 100 = \frac{200}{3}$

$= 33\frac{1}{3}$

अत: घटने का प्रतिशत $= 33\frac{1}{3}$%

प्रयास कीजिए :

1. घटने या बढ़ने का प्रतिशत ज्ञात कीजिए :

(i) चीनी 15 प्रति किग्रा के स्थान पर 16 रु0 प्रति किग्रा हो गयी ।

(ii) परिवार में चीनी प्रतिमाह 15 किग्रा लगती थी और परिवार के सदस्यों की संख्या बढ़ जाने से 20 किग्रा चीनी की खपत हो गई।

2. (i) एक किग्रा काजू का मूल्य 400 से बढ़कर 425 हो जाय तो बढ़त का प्रतिशत क्या होगा?

(ii) 112 प्रतिशत का अर्थ समझाइए।

7.3.3 बट्टा (Discount)

हम देखते हैं कि दुकानदार ग्राहकों को आकर्षित करने के लिए बेची जाने वाली वस्तुओं के मूल्य पर कुछ छूट देते हैं। इस छूट को बट्टा कहते हैं। वस्तु पर छपा हुआ मूल्य वस्तु का अंकित मूल्य कहलाता है। किसी वस्तु के अंकित मूल्य में से बट्टे की राशि निकालने पर जितनी धनराशि दुकानदार को मिलती है, वह धनराशि उस वस्तु का विक्रय मूल्य कहलाती है।

एक दुकान पर लिखा था,खादी पर 20% की छूट। इसका अर्थ है कि 100 छपे मूल्य वाली वस्तु के लिए ग्राहक को 80 देने पड़ते हैं। यहाँ 100 की वस्तु पर 20 का बट्टा दिया गया।

- वस्तु पर छपा मूल्य उसका अंकित मूल्य कहलाता है।
- वस्तु के छपे मूल्य पर जो छूट दी जाती है वह बट्टा कहलाती है।
- बट्टा अंकित मूल्य पर ही दिया जाता है।
- जितने रुपये में वस्तु बेची जाती है वह वस्तु का विक्रय मूल्य कहलाता है, अर्थात्

विक्रय मूल्य =अंकित मूल्य – बट्टा

उदाहरण 24:सलमा ने साड़ियों के सेल में 25%की छूट मिलने पर 600 अंकित मूल्य की साड़ी खरीदी।

उसने वह साड़ी कितने में खरीदी?

हल : साड़ी का अंकित मूल्य = 600

छूट या बट्टा=25%

बट्टे की राशि= ₹ 600 का 25%

$= ₹ \frac{600 \times 25}{100}$

=₹150

अत: साड़ी का विक्रय-मूल्य=अंकित मूल्य – बट्टा

= ₹600 – ₹ 150

= ₹450

अत: सलमा ने वह साड़ी 450 में खरीदी।

उदाहरण 25:एक कमीज का अंकित मूल्य 50 था तथा वह 45 में उपलब्ध थी। उस पर किस प्रतिशत दर से

बट्टा दिया गया ?

हल : कमीज का अंकित मूल्य = 50

विक्रय-मूल्य=45

बट्टा =अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

= ₹ 50 – ₹45

= ₹ 5

बट्टा प्रतिशत $= \frac{5}{50} \times 100 = 10\%$

अत: बट्टे की दर = 10%

उदाहरण 26: अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए, जबकि विक्रय मूल्य 1920 और बट्टा 4% है।

हल : माना अंकित मूल्य=100

बट्टा==4%

विक्रय-मूल्य= (100 – 4)

= 96 रुपये

विक्रय-मूल्य 96 रुपये है, तो अंकित मूल्य= 100

∴ विक्रय-मूल्य 1 रुपये है, तो अंकित मूल्य = ₹ $\frac{100}{96}$

∴ विक्रय-मूल्य 1920 रुपये है, तो अंकित मूल्य = ₹ $\frac{100 \times 1920}{96}$

= ₹2000

प्रयास कीजिये:

निम्नांकित सारणी अपनी उत्तर पुस्तिका में बना कर रिक्त स्थानों को भरिए।

क्र.सं.	अंकित मूल्य	विक्रय मूल्य	बट्टे की राशि	बट्टे की दर
(i)	₹200	₹150	₹50	....
(ii)	₹400	₹320	....	....
(iii)	₹250	.....	₹100	....
(iv)	....	₹160	....	20%
(v)	₹600	.....	....	25%

7.3.4 साधारण ब्याज

हम पिछली कक्षा में साधारण ब्याज का सामान्य ज्ञात प्राप्त कर चुके हैं। अब हम निम्नलिखित सूत्रों पर आधारित कुछ अन्य प्रश्नों को हल करेंगे।

साधारण ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

मूलधन $= \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$

दर $= \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$

समय $= \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

उदाहरण 27: ₹400 का $7\frac{1}{2}\%$ वार्षिक ब्याज की दर से $3\frac{1}{2}$ वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : मूलधन = ₹ 400 , दर = $7\frac{1}{2}\%$ वार्षिक = $\frac{15}{2}\%$ वार्षिक, समय = $3\frac{1}{2}$ वर्ष = $\frac{7}{2}$ वर्ष

साधारण ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

$= \frac{400 \times 15 \times 7}{100 \times 2 \times 2}$ रुपये

= 105 रुपये

उदाहरण 28: किसी वित्तीय कम्पनी के सेविंग बैंक खाते में साधारण ब्याज की दर 4% प्रतिवर्ष है। सीमा

ने खाते में 5,000 जमा किया। उसे $2\frac{1}{2}$ वर्ष बाद कितना ब्याज तथा मिश्रधन मिलेगा ?

हल : मूलधन = ₹5,000 , दर = 4% वार्षिक|, समय = $2\frac{1}{2}$ वर्ष = $\frac{5}{2}$ वर्ष

साधारण ब्याज = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

= $\frac{5000 \times 4 \times 5}{100 \times 2}$ रुपये+ब्याज

= ₹5,000+ ₹ 500 = ₹ 5,500

उदाहरण 29: किसी धन का $2\frac{1}{5}\%$ वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष में साधारण ब्याज 121 हो जाता है। धन

ज्ञात कीजिए।

हल : दर = $2\frac{1}{5}\%$ वार्षिक|= $\frac{11}{5}\%$ वार्षिक, समय = 2वर्ष, ब्याज = 121

मूलधन = $\frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$

= ₹ $\frac{121 \times 100}{\frac{11}{5} \times 2}$

=₹ $\frac{121 \times 100 \times 5}{11 \times 2}$

= ₹2750

अत: धन= ₹2750

देखें :

5000 के कर्ज पर शंभू 2 वर्ष बाद 640 साधारण ब्याज देता है। ब्याज की दर प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

इस प्रश्नका हल नीचे दो विधियों से किया गया है।ध्यान से देखिए और प्रयुक्त विधि को पहचानिए :

हल : ब्याज $= \frac{\text{मू} \times \text{द} \times \text{स}}{100}$

या ब्याज $= \frac{5000 \times \text{द} \times 2}{100}$

$\frac{5000 \times \text{द} \times 2}{100} = 640$

द $= \frac{640 \times 100}{2 \times 5000}$

$= \frac{32}{5}$

द $= 6.4$

अतः ब्याज की दर = 6.4% वार्षिक

हल : चूँकि 2 वर्ष का ब्याज = 640 रुपये

अतः 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{640}{2}$ रुपये = 320 रुपये

5000 रुपये पर 1 वर्ष का ब्याज = 320 रुपये

1 रुपये पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{320}{5000}$ रुपये

अतः 100 रु0 पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{320 \times 100}{5000}$

$= \frac{32}{5}$

$= 6.4$

अतः ब्याज की दर = 6.4% वार्षिक

प्रयास कीजिए :

1. 100 रुपये पर 2 वर्ष का 3% वार्षिक दर से साधारण ब्याज कितना होगा ?

2. 400 रुपये पर 3 वर्ष का 5% वार्षिक ब्याज की दर से ब्याज तथा मिश्रधन ज्ञात कीजिए ।

3. किस धन का 2 वर्षों में 5% वार्षिक ब्याज की दर से साधारण ब्याज 45 रुपये होगा ?

4. कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 200 रुपये पर 3 वर्ष का साधारण ब्याज 60 रुपये होगा ?

5. कितने समय में 300 रुपये पर 6% वार्षिक ब्याज की दर से साधारण ब्याज 90 रुपये होगा ?

अभ्यास 7(e)

1. ₹ 800 पर 5 वर्ष का ब्याज $3\frac{1}{2}\%$ वार्षिक दर से ज्ञात कीजिए।

2. ₹1,500 पर 6 महीने का 12%वार्षिक दर से ब्याज तथा मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

3. ₹1,600 का $3\frac{1}{2}$ वर्ष का $5\frac{1}{2}\%$ वार्षिक ब्याज की दर से ब्याज तथा मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

4.किसी धन का $6\frac{1}{4}\%$ वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष में साधारण ब्याज 150 हो जाता है। धन ज्ञात कीजिए।

5. ₹7,200 का 3 वर्ष का ब्याज 1,080 है। ब्याज की दर बताइए।

6. ₹ 800 का $6\frac{1}{4}$ वर्ष में मिश्रधन 1150 हो जाता है। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

7.कितने समय में 7,500 पर 11% वार्षिक दर से साधारण ब्याज 4,125 हो जायेगा ?

8.1,200 का वर्ष में मिश्रधन 1860 हो जाता है। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

9.कितने समय में 350 $2\frac{1}{2}\%$ वार्षिक ब्याज की दर से 385 हो जायेगा ?

10.10% वार्षिक ब्याज की दर से कितने समय में 200 तीन गुना हो जायेगा ?

11. एक वस्तु का अंकित मूल्य ₹ 500 है। वह 10% बट्टे पर बेची गई, वस्तु का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
12. एक घड़ी का विक्रय मूल्य ₹420 है। वह 25% बट्टे पर बेची गई। घड़ी का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।
13. एक सिलाई मशीन का अंकित मूल्य ₹830 है। यदि दुकानदार ग्राहकों को 20% बट्टा देता है, तो मशीन का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
14. एक पुस्तक का अंकित मूल्य ₹75 है और दुकानदार उसे ₹60 में बेचता है। वह कितने प्रतिशत की छूट प्रदान करता है ?
15. एक रेडियो का अंकित मूल्य ₹500 तथा ग्राहक को ₹450 में उपलब्ध है। बताइए उस पर किस प्रतिशत दर से बट्टा दिया जाता है ?
16. एक सन्दूक का विक्रय मूल्य ₹1400 है और दुकानदार ग्राहकों को 30% बट्टा प्रदान करता है। सन्दूक का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

7.4 चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

हम जानते हैं कि, (i) साधारण ब्याज (Simple Interest) $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

(ii) मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

निम्नांकित सारणियों का अवलोकन कीजिए :

सारणी 1: 1000 का 10% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 1 वर्ष तथा 2 वर्ष के ब्याज और मिश्रधन की सारणी:

मूलधन (₹)	दर (% वार्षिक)	समय (वर्ष)	ब्याज (₹)	मिश्रधन (₹)
1000	10	1	100	1100
1100	10	2	200	1200

(i) 1 वर्ष बाद ब्याज कितना है ?

(ii) 1 वर्ष बाद मिश्रधन कितना है ?

(iii) 2 वर्ष बाद ब्याज कितना है ?

(iv) 2 वर्ष बाद मिश्रधन कितना है ?

मोहन ने 1000 रुपये बैंक से 10% वार्षिक ब्याज पर ऋण लिया।

1 वर्ष बाद ब्याज 100 हो गया।

1 वर्ष बाद धन जमा न करने पर बैंक का मोहन के पास 1000 ऋण था ही, 100 रुपये (ब्याज का) ऋण और हो गया।

अत: मोहन को दूसरे वर्ष के लिए (1000 + 100 =1100) पर बैंक को ब्याज देना होगा जिसको निम्नांकित सारणी द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

सारणी 2:

मूलधन (₹)	दर (% वार्षिक)	समय (वर्ष)	ब्याज (₹)	मिश्रधन (₹)
1000	10	1(पहले वर्ष)	100	1100
1100	10	1(दूसरे वर्ष)	110	1210

(i) पहले वर्ष का ब्याज कितना है ?

(ii) पहले वर्ष के अन्त में मिश्रधन कितना है ?

(iii) दूसरे वर्ष का मूलधन कितना है ?

(iv) दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन कितना है ?

सारणी (2) से हम देखते हैं कि,

रु. 1000 का 2 वर्ष बाद मिश्रधन =रु. 1210

रु. 1000 का 2 वर्ष का ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

= ₹ 1210 – ₹ 1000

= ₹ 210

यह ब्याज सारणी (1) में प्रदर्शित 2 वर्ष के ब्याज 200 से (210 – 200) =10 अधिक है।

यह धनराशि, प्रथम वर्ष के ब्याज 100 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से, 1 वर्ष का ब्याज है।

इस प्रकार, सारणी (2) में ब्याज पर भी ब्याज की गणना की गयी है।

उदाहरण 30 :

- सीमा ने 500 रुपये डाकघर के बचत बैंक खाते में जमा किया। यदि ब्याज दर 5% वार्षिक हो और ब्याज

की गणना वार्षिक अवशेष पर की जाय तो 2 वर्ष बाद उसे कितने रुपये ब्याज के रूप में मिले ? यह ब्याज 2

वर्ष के साधारण ब्याज से कितना अधिक है ?

1 वर्ष बाद ब्याज= $\frac{500 \times 5 \times 1}{100} = 25$ रुपये

1 वर्ष बाद मिश्रधन =(500 + 25) रुपये =525 रुपये

दूसरे वर्ष के लिए मूलधन = ₹ 525

दूसरे वर्ष का ब्याज = $\frac{525 \times 5 \times 1}{100} = 26.25$ रुपये

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ₹ (525.00 + 26.25) = ₹ 551.25

2 वर्ष बाद ब्याज = ₹ 551.25 – ₹ 500.00 = ₹ 51.25

2 वर्ष बाद साधारण ब्याज $= ₹ \frac{500 \times 5 \times 2}{100} = ₹ 50.00$

अधिक ब्याज = ₹(51.25 – 50.00) = ₹1.25

यह ब्याज प्रथम वर्ष के ब्याज 25 पर ब्याज है

यहाँ भी ब्याज पर ब्याज की गणना $₹ \frac{25 \times 5 \times 1}{100} = ₹ 1.25$ की गयी है।

•200 रुपये का 10% वार्षिक ब्याज की दर से लिये गए ऋण को 2 वर्ष बाद जमा करने पर कितना ब्याज देना

पड़ेगा?

आप देखेंगे कि दूसरे वर्ष के ब्याज की गणना में पहले वर्ष के ब्याज पर भी ब्याज की गणना करनी होगी।

ब्याज की इस प्रणाली को ब्याज पर ब्याज या चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) कहते हैं तथा इस प्रकार

प्राप्त मिश्रधन को चक्रवृद्धि मिश्रधन कहते हैं।

दोनों सारणियों के अवलोकन से निम्नांकित निष्कर्ष निकलता है :

- समान धन, समान समय और समान वार्षिक दर होने पर एक वर्ष के लिए,
  चक्रवृद्धि ब्याज =साधारण ब्याज
- चक्रवृद्धि ब्याज की गणना में पहले वर्ष का मिश्रधन, दूसरे वर्ष का मूलधन होता है। इसी प्रकार आगे के वर्षों के लिए किया जाता है।
- चक्रवृद्धि ब्याज =चक्रवृद्धि मिश्रधन – मूलधन

उदाहरण 31: 400 का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : पहले वर्ष का मूलधन= 400

पहले वर्ष का ब्याज $= \frac{म \times द \times स}{100} = ₹\frac{400 \times 5 \times 1}{100} = ₹20$

पहले वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ₹(400 + 20)

= ₹ 420

दूसरे वर्ष के लिए मूलधन = ₹ 420

दूसरे वर्ष का ब्याज $= ₹\frac{420 \times 5 \times 1}{100} = ₹21$

दूसरे वर्ष का मिश्रधन = ₹(420 + 21)

= ₹441

2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = ₹441 – ₹ 400

= ₹41

उदाहरण 32: ₹ 5000 का 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज में अन्तर

ज्ञात कीजिए।

हल : पहले वर्ष का मूलधन =5000

पहले वर्ष का ब्याज= ` $\frac{5000 \times 4 \times 1}{100}$

= ₹200

पहले वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ₹ (5000 + 200)

= ₹5200

दूसरे वर्ष के लिए मूलधन = ₹ 5200

दूसरे वर्ष का ब्याज = ₹ $\frac{5000 \times 4 \times 1}{100}$

= ₹208

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ₹ 5200 + ₹208

= ₹5408

∴ 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = ₹5408 – ₹5000

= ₹ 408

2 वर्ष का साधारण ब्याज = $\frac{म \times द \times स}{100}$ = ₹ $\frac{5000 \times 4 \times 2}{100}$

= ₹400

चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज में अन्तर = ₹ (408 – 400) = ₹ 8

उदाहरण 33: शीला ने बैंक में 1200 जमा किया। 3 वर्ष बाद उसे कुल कितने रुपये ब्याज मिले, यदि ब्याज

दर 10% वार्षिक चक्रवृद्धि हो ?

हल : पहले वर्ष का मूलधन =**1200**

पहले वर्ष का ब्याज =₹ $\frac{1200 \times 10 \times 1}{100}$

= ₹120

पहले वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ` (1200 + 120)

₹ 1320

दूसरे वर्ष के लिए मूलधन = ₹1320

दूसरे वर्ष के लिए का ब्याज=₹ $\frac{1320 \times 10 \times 1}{100}$

= ₹ 132

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ₹1320 + ₹ 132

= ₹ 1452

तीसरे वर्ष के लिए मूलधन = ₹ 1452

तीसरे वर्ष का मूलधन = $\frac{1452 \times 10 \times 1}{100}$

= ₹145.20

तीसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ₹ 1452 + ₹145.20

= ₹ 1597.20

चक्रवृद्धि ब्याज = ₹(1597.20 – 1200)

= ₹ 397.20

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए :

मूलधन (₹)	दर (% वार्षिक)	समय (वर्ष)	ब्याज (₹)	मिश्रधन (₹)
200	6	1	12	....
300	5	2	....	330
450	4	3	....	.....

अभ्यास 7 (f)

1. निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर के सही विकल्प चुनिए :

(a) 150 का 4% वार्षिक ब्याज की दर से 1 वर्ष का साधारण ब्याज होगा -

(i) 2 (ii) 4 (iii) 6 (iv) 7

(b) 200 का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का साधारण ब्याज होगा -

(i) 10 (ii) 20 (iii) 30 (iv) 40

2. 800 का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज कितना होगा ?

3. 1250 का 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए ।

4. 2400 के ऋण को 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्ष बाद चुकता किया गया। देय चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

5. 4000 के 10%वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज में अन्तर ज्ञात कीजिए।

6. 5000 के 8% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज में अन्तर ज्ञात कीजिए।

7. अब्दुल ने बैंक की बचतखाता में 1500 जमा किये। 2 वर्ष बाद उसे कुल कितने रुपये ब्याज मिले, यदि बैंक 4% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज देता हो ?

8. 8000 का 3 वर्ष का 5% वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

9. 1600 का 12.5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

7.4.1 ऐकिक नियम द्वारा चक्रवृद्धि मिश्रधन एवं चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करना

इस विधि में 1 के लिये चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात करके किसी भी धनराशि के मूलधन का चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात किया जाता है।

•1 का 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात करना।

पहले वर्ष के लिए मूलधन = 1

100 का 1वर्ष का ब्याज = 10

1 का 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{10}{100} =$ ₹ $\frac{1}{10}$

पहले वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ₹ $\left(1+\frac{1}{10}\right)$

अत: दूसरे वर्ष के लिएमूलधन = ₹ $\left(1+\frac{1}{10}\right)$

` 1 मूलधन पर 1 वर्ष के अन्त में चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $\left(1+\frac{1}{10}\right)$

₹ $\left(1+\frac{1}{10}\right)$ मूलधन पर 1 वर्ष के अन्त में चक्रवृद्धि मिश्रधन

= ₹ $\left(1+\frac{1}{10}\right)\times\left(1+\frac{1}{10}\right)$

= ₹ $\left(1+\frac{1}{10}\right)^2$

तीसरे वर्ष के लिए मूलधन = ₹ $\left(1+\frac{1}{10}\right)^2$

इसी प्रकार, तीसरे वर्ष के लिए चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$

उपर्युक्त की सहायता से 1 रुपये का 4 वर्ष के अन्त में चक्रवृद्धि मिश्रधन बताइए।

अत: 1 रुपये का ह वर्ष के अंतमें चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $\left(1+\frac{1}{10}\right)^n$

इसलिए Pरुपये मूलधन का n वर्ष के अन्त में चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $P\left(1+\frac{1}{10}\right)^n$

1 रुपये का nवर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात करने हेतु 1 रुपये का 1 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात करके उस पर घातांक 'n' लगाते हैं। इसमें मूलधन की राशि से गुणा करके वांछित चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण 34: ₹800 का 5% वार्षिकब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन तथा चक्रवृद्धि ब्याज ऐकिक नियम से ज्ञात कीजिए।

हल : ₹100 का 1वर्ष का ब्याज = ₹ 5

∴ ₹1 का 1 वर्ष का ब्याज = ₹ $\frac{5}{100}$ = ₹ $\frac{1}{20}$

∴ ₹ 1 का 1 वर्ष का मिश्रधन = ₹ $\frac{1}{20}\left(1+\frac{1}{20}\right)$

= ₹ $\frac{21}{20}$

∴ ₹ 1 का 2 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $\left(\frac{21}{20}\right)^2$

₹ 800 का 2वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $\left(\frac{21}{20}\right)^2 \times 800$

= ₹ $\frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times 800$

= ₹ $\frac{441}{400} \times 800$

= ₹ 882

चक्रवृद्धि ब्याज = चक्रवृद्धि मिश्रधन – मूलधन

= ₹ (882 – 800)

= ₹ 82

उदाहरण 35: ₹ 5000 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष बाद चक्रवृद्धि मिश्रधन तथा चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : ₹ 100 का 1 वर्ष का ब्याज = ₹ 10

इसलिए 1 का 1वर्ष का ब्याज = ₹ $\frac{10}{100}$ = ₹ $\frac{1}{10}$

या 1 का 1 वर्ष का मिश्रधन = ₹ $\left(1+\frac{1}{10}\right)$ = ₹ $\frac{11}{10}$

इस प्रकार 1 का 3 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $\left(\frac{11}{10}\right)^3$

अत: 5000 रुपये का 3वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $\left(\frac{11}{10}\right)^3 \times 5000$

= ₹ $\frac{11}{10}\times\frac{11}{10}\times\frac{11}{10}\times 5000$

= ₹ $\frac{1331}{1000}\times 5000$

= ₹ 6655

चक्रवृद्धि ब्याज = चक्रवृद्धि मिश्रधन – मूलधन

= ₹ (6655 – 5000)

= ₹ 1655

अभ्यास 7(g)

ऐकिक नियम द्वारा ज्ञात कीजिए :

1. 500 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. 400 का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
3. 1000 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन कितना होगा?
4. 8000 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात कीजिए।
5. 3000 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन एवं चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
6. 1600 का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
7. 6250 का 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
8. नसीम ने 5000 अपने समीप के ग्रामीण बैंक में सावधि जमा योजना में 3 वर्ष के लिए 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर जमा किया। 3 वर्ष पश्चात् उसे बैंक से कितने

रुपये प्राप्त होंगे ?

9. हेमलता ने 2500 डाकघर बचत खाते में जमा किया। 2 वर्ष बाद उसे कुल कितने रुपये मिले, यदि ब्याज दर 4% वार्षिक चक्रवृद्धि हो?

10. डेविड ने 1600 का ऋण 2.5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर लिया। 2 वर्ष बाद उसने ऋण का भुगतान कर दिया। बताइए उसे कुल कितने रुपये भुगतान करने पड़े तथा कितने रुपये ब्याज देने पड़े?

11. डिम्पल ने 5120 बैंक में, 2 वर्ष के लिए $6\frac{1}{4}\%$ वार्षिकचक्रवृद्धि ब्याज की दर पर जमा किया। अवधि के पश्चात् उसे कुल कितने रुपये मिलेंगे ?

5.4.2 चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र तथा उसका अनुप्रयोग

प्रथम विधि :

₹200 का 7% वार्षिक ब्याज की दर से 1 वर्ष, 2 वर्षतथा 3वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात करना।

₹ 100 का 1 वर्ष का ब्याज = ₹7

$\therefore$ ₹ 1 का 1 वर्ष का ब्याज = ₹ $\frac{7}{100}$

₹1 का 1वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $\left(1+\frac{7}{100}\right)$

₹ 200 का 1 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $200\left(1+\frac{7}{100}\right)^1$

₹ 200 का 2 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2$

तथा 200 का 3 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $200\left(1+\frac{7}{100}\right)^3$

इसी प्रकार हम ज्ञात कर सकते हैं कि :

- ₹ 500 का 8% वार्षिक ब्याज की दर से 5 वर्ष बाद

चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $500\left(1+\frac{8}{100}\right)^5$

- 1200 का 15% वार्षिकब्याज की दर से 5 वर्ष बाद

चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $1200\left(1+\frac{15}{100}\right)^5$

यदि मूलधन को P, दर को r, समय को ह तथा चक्रवृद्धि मिश्रधन को A से प्रर्दिशत करें तो-

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

उदाहरण 36: 3000 रुपये का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष बाद चक्रवृद्धि मिश्रधन तथा चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : मूलधन (P)= 3000 रु0, दर (r)= 10%, समय(n) = 3 वर्ष

∴ चक्रवृद्धि मिश्रधन $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

= ₹ $3000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3$

= ₹ $3000\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$

= ₹ $3000\left(\frac{11}{10}\right)^3$

= ₹ $3000 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$

= ₹ $3000 \times \frac{1331}{1000}$

= ₹3993

चक्रवृद्धि ब्याज = 3993 – रु. 3000 = रु. 993

उदाहरण 37:अब्दुल ने एक बैंक में 2000 रुपये जमा किये। गाय खरीदने के लिये उसे 2 वर्ष बाद कुल धन बैंक से निकालना पड़ा। यदि ब्याज दर 5% वार्षिक चक्रवृद्धि हो, तो उसे कुल कितने रुपये मिले?

हल **:** P = 2000 रुपये; r = 5%; n = 2 वर्ष

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

चक्रवृद्धि मिश्रधन = ₹ $2000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$

= ₹ $2000\left(1 + \frac{1}{20}\right)^2$

= ₹ $2000\left(\frac{21}{20}\right)^2$

= ₹ $2000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$

= ₹ $2000 \times \frac{441}{400}$

= ₹ 2205

उदाहरण 38:सुमन ने एक समिति से मकान की मरम्मत हेतु रु. 16000 का ऋण $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर लिया। 2 वर्ष बाद उसने पूरा ऋण एक मुस्त जमा कर दिया। जमा की गयी धनराशि की गणना कीजिए।

हल : P = ₹ 16000, r = $12\frac{1}{2}\% = \frac{25}{2}\%$; n = 2 वर्ष

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$= ₹\ 16000\left(1+\frac{25}{200}\right)^2$$

$$= ₹\ 16000\left(\frac{9}{8}\right)^2$$

$$= ₹\ 16000\times\frac{9}{8}\times\frac{9}{8}$$

$$= ₹\ 16000\times\frac{81}{64}$$

= ₹20250

जमा की गयी धनराशि =20250 रुपये

अभ्यास 7(h)

चक्रवृद्धि मिश्रधन के सूत्र का अनुप्रयोग करके ज्ञात कीजिए :

1. 400 रुपये का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन।

2. 500 रुपये का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन।

3. 625 रुपये का 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज।

4. 1000 रुपये का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज।

5. 16,000 रुपये का 5 %वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज।

6. मनोज ने 2500 रुपये बैंक में अपने बचत खाते में जमा किया। 2 वर्ष बाद उसे कुल कितने

रुपये ब्याज के रूप में मिले, यदि बचत खाते में 4%वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज देय हो ?

7. फातिमा ने डाकघर में 1250 रुपये 2 वर्ष के लिए सावधि जमा खाता में जमा किया। यदि

ब्याज दर 9% वार्षिक चक्रवृद्धि हो, तो 2 वर्ष बाद चक्रवृद्धि मिश्रधन तथा चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात

कीजिए।

8. जार्ज ने किसी वित्तीय कम्पनी से 8000 रुपये 2 वर्ष के लिए 15% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर

उधार लिये। उसे कम्पनी को कितनी धनराशि वापस करनी पड़ेगी ?

9. तनु ने एक वित्तीय कम्पनी में 2000 रुपये लगाये। यदि कम्पनी 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज

देती हो, तो 3 वर्ष बाद उसको कुल कितने रुपये मिले ?

10. अनीता ने एक राष्ट्रीयकृत बैंक में 2500 रुपये जमा किये। 2 वर्ष बाद उसे कुल कितने रुपये

मिले, यदि बैंक 8% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज देता हो ?

7.5. कर (Tax)

प्रत्येक राष्ट्र के द्वारा प्रजा के हित में अनेक कार्य जैसे देश की सुरक्षा हेतु सेना का रख रखाव सड़क

एवं पुल निर्माण, आम नागरिकों की चिकित्सा एवं शिक्षा की व्यवस्था करना, आदि किये जाते हैं।

उक्त कार्य हेतु धन की आवश्यकता होती है। धन का संग्रह कर-लगाकर किया जाता है। इस प्रकार

धन संग्रह व्यवस्था को कर व्यवस्था कहते हैं।

यदि राष्ट्र/राज्य द्वारा जनता से कर न लिया जाये तो राष्ट्र / राज्य के कोष में कोई धन नहीं होगा

और राष्ट्र /राज्य को अपने उत्तरदायित्व का वहन करना असंभव होगा।

हमारे देश में केन्द्र सरकार एवं राज्य सरकार दोनों अपने-अपने क्षेत्र में विभिन्न जन उपयोगी कार्य

करते है। केन्द्र एवं राज्य सरकार के कार्य क्षेत्र अलग-अलग विभाजित हैं। प्रदेश स्तर पर सड़वेंâ,

पुल, बाँध, स्वूâल, चिकित्सालय, सरकारी भवन निर्माण, पुलिस-प्रशासन आदि की व्यवस्था राज्य

सरकार द्वारा की जाती है। प्रदेश स्तर पर विभिन्न वस्तुओं पर कर लगाकर राजस्व प्राप्त किया

जाता है। जैसे - भू राजस्व, वैट, बिक्रीकर आदि।

इसी प्रकार केन्द्र सरकार द्वारा सेना का रख रखाव, उच्च शिक्षा संस्था आदि के लिये विभिन्न प्रकार

के कर, जैसे आयकर, एक्साइज ड्यूटी, कस्टम ड्यूटी, सेवाकर द्वारा धन संग्रह किया जाता है।

7.5.1 कर के प्रकार

कर मुख्यत: दो प्रकार के होते हैं -

प्रत्यक्ष कर (Direct Tax)

सरकार द्वारा किसी व्यक्ति अथवा व्यक्ति समूह पर लगाया गया कर जो उसे सीधा प्रभावित करता

है, प्रत्यक्ष कर कहलाता है। जैसे आयकर, सम्पत्ति कर, उपहार कर आदि।

आयकर उन सभी व्यक्तियों व व्यवसायिक प्रतिष्ठान को देना होता है। जिनकी वार्षिक आय

निर्धारित सीमा से अधिक है।

आयकर की दर आय के स्तर पर निर्भर करती है। वर्तमान में आयकर की दर निम्नवत है -

क. वार्षिक आय ₹ 2,50,000 तक आयकर · शून्य

ख. वार्षिक आय ₹ 2,50,000 से ₹5,00,000 तक आयकर · 5%

ग. वार्षिक आय ₹ 5,00,000 से ₹ 10,00,000 तक आयकर · 20%

घ. वार्षिक आय ₹ 10,00,000 से अधिक पर तक आयकर · 30%

अप्रत्यक्ष कर (Indirect Tax)

जैसे उत्पाद शुल्क, सर्विस टैक्स (सेवा कर) इत्यादि। इस प्रकार के कर की व्यवस्था में कर के

भुगतान का उत्तर दायित्व वस्तु के विव्रेâता या सेवा प्रदाता की होती है परन्तु वस्तु या सेवा के

मूल्य में कर सम्मलित रहता है। इस प्रकार विक्रेता (खरीदने वाला) को वस्तु या सेवा के मूल्य के

साथ-साथ अप्रत्यक्ष कर का भी भुगतान विव्रेâता को करना पड़ता है। इस प्रकार अप्रत्यक्ष कर का

भार अन्तिम उपभोक्ता (विक्रेता) जो वस्तु या सेवा का उपयोग करता है उसे वहन करना पड़ता है।

अप्रत्यक्ष कर वसूली की दृष्टि से सुगम है, परन्तु इसका भुगतान गरीब/अमीर सभी को करना होता

है। अप्रत्यक्ष कर का हिस्सा कुल कर (प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष) में काफी अधिक होता है।

वस्तु एवं सेवा कर (GST)

१ जुलाई २०१७ को पूर्ववर्ती अप्रत्यक्ष कर जैसे उत्पाद कर (Excise duty), सेवाकर (Service

tax) जैसे - होटल में खाने में, बिजली बिल आदि में) तथा राज्यों द्वारा लगाए गए बिक्री कर (sale

tax) को समाप्त करके, केन्द्र सरकार द्वारा एक नए अप्रत्यक्ष कर जिसे GST(Goods and Service

Tax) नाम से जाना जाता है, लागू किया है, जिसकी दर विभिन्न वस्तुओं पर क्रमश: 5%, 12%,

18% तथा 28% है। इन दरों को केन्द्र सरकार समय-समय पर पुनरीक्षित करती रहती है।

उदाहरण 39: राकेश के पिता की वार्षिक आय ₹ 2,58,000 हैं। यदि ₹ 2,50,000 तक की आय, आयकर से मुक्त है, तो 10% की दर से उसे कितना आयकर देना पड़ेगा ?

हल : वार्षिक आय = ₹ 2,58,000

आयकर से मुक्त आय = ₹ 2,50,000

आय जिस पर कर देय है = ₹(2,58,000 - 2,50,000)रुपये

= ₹ 8,000

देय कर राशि = ₹ 8,000 का 10%

= ₹ (8000*10)/ 100

= ₹ 800

उदाहरण 40: एक जोड़ी जूते का अंकित मूल्य ₹ 1500 हैं। यदि उस पर की दर से जी.एस.टी देना पड़ता है, तो उसे खरीदने पर ग्राहक को कुल कितने रुपये देने पड़ेंगे ?

हल : जूते का अंकित मूल्य = ₹ 1500

जी.एस.टी = 18%

देय जी.एस.टी = ₹ 1500 का 18%

जी.एस.टी = ₹(1500* 18)/100

जी.एस.टी = ₹ 270

अत: जूते का देय मूल्य = अंकित मूल्य + जी.एस.टी

= ₹ (1500 + 270) = ₹270

अभ्यास 7(i)

1. वर्तमान में कर मुक्त आय की सीमा क्या है ?

2.केशव की मासिक आय ₹20,000 है। बताइये केशव की वार्षिक आय कर योग्य है या नहीं ?

3.श्याम के पिता की वार्षिक आय ₹ 3,60,000 है। यदि ₹ 2,50,000 तक की आयकर मुक्त है तो 5% की दर से उसे कितना आयकर देना होगा ?

4.जी.एस.टी. से आप क्या समझते हैं ?

5.एक जोड़ी सैंडिल का मूल्य ₹ 1000है। यदि उस पर 18% की दर से जी.एस.टी देना पड़ता है, तो

सैंडिल खरीदने पर ग्राहक को कुल कितने रुपये देना पड़ेगा।

6. प्रतिभा एक मेज ₹ 24,000 में खरीदती है जिसमें 12% जी.एस.टी भी सम्मिलित है। मेज का

अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

7.विशाल ने अपने जन्मदिन पर अपने 20 मित्रों को होटल में भोजन पर आमन्त्रित किया। भोजन पर ₹ 5000 खर्च हुआ। इसके अतिरिक्त 18% जी.एस.टी भी चुकाना पड़ा। विशाल को अपने प्रत्येक मित्र के लिए भोजन पर कितना व्यय करना पड़ा ?

दक्षता अभ्यास-7

निम्नांकित 1 से 4 प्रश्नों तक उत्तर का सही विकल्प छाँटकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

1.यदि एक मोटरकार 45 किमी प्रति घंटा जाती है तो वह 1 सेकन्ड में जाएगी :

(a) 45 मी (b) 50 मी (c) 12.5 मी (d) 12.5 किमी

2. यदि 6 आदमी एक काम को 4 दिन में करते हैं तो उसी काम को 3 आदमी करेंगे :

(a) 21 दिन में (b) 6 दिन में (c) 8 दिन में (d) 18 दिन में

3. यदि राम 5 दिन में किसी काम का $\frac{1}{4}$ भाग कर सकता है तो वह पूरा काम करेगा :

(a) 20 दिन में **(b)** $\frac{5}{4}$ दिन में (c) 5 दिन में (d) 80 दिन में

4. 3 मजदूर किसी मकान की सफेदी 20 दिन में कर सकते हैं। यदि सफेदी 6 दिन में करानी हो तो काम पर लगने वाले मजदूरों की संख्या होगी :

(a) 20 मजदूर (b) 10 मजदूर (c) 6 मजदूर (d) 30 मजदूर

5. एक व्यक्ति अपने मासिक वेतन का 80% खर्च करता है। यदि उसकी मासिक बचत 1200 रुपयें हो, तो उसका मासिक वेतन कितना है ?

6. एक रेलगाड़ी 50 मी लम्बी है। वह बिजली के खम्भे को 2793.ज्हुसेकेण्ड में पार कर जाती है। गाड़ी की चाल किमी प्रति घंटा ज्ञात कीजिए।

7. दो साइकिल चालक क्रमश: 10 किमी प्रति घंटा तथा 12 किमी प्रति घंटा की चाल से एक ही निश्चित स्थान से विपरीत दिशाओं में चलते हैं। 5 घंटे बाद दोनों एक दूसरे से कितनी दूरी पर होंगे ?

8. एक विद्यालय में 55% लड़के हैं। यदि लड़कियों की संख्या 900 हों, तो लड़कों की संख्या बताइए।

9. एक परीक्षा में गणित में कुल 45%, विज्ञान में कुल 25% विद्यार्थी अनुत्तीर्ण हुए। यदि 15% दोनों
विषयों में अनुत्तीर्ण रहे हों, तो कितने प्रतिशत विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए ?

10. 364 रुपये में एक रेडियो बेचने से 9% हानि होती है, तो रेडियो का क्रय-मूल्य ज्ञात कीजिए।

11. साड़ियों की सेल में 20% छूट मिलने पर 720 रुपये अंकित मूल्य की साड़ी कितने रुपये में मिलेगी?

12. किरन ने डाकघर में बचत बैंक खाते में 1600 रुपये जमा किया। उसने 3 वर्ष तक इसमें से कोई धन नहीं
निकाला। 3 वर्ष बाद सारा धन निकाल लिया। बताइए उसे कुल कितने रुपये ब्याज मिले, यदि डाकघर में
ब्याज दर 5% वार्षिक चक्रवृद्धि हो?

13. माजिद ने डाकघर के सावधि जमा खाता में 5000 रुपये दो वर्ष के लिए जमा किया। 2 वर्ष बाद उसे
कुल कितने रुपये मिले, यदि ब्याज दर 8% वार्षिक चक्रवृद्धि हो।

इस इकाई में हमने सीखा

1. चार राशियों के समानुपात में होने के लिए आवश्यक है :
   बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

2. जब दो राशियाँ x और y इस प्रकार से संबंधित हो कि x के बढ़ने पर दूसरी राशि y में उसी अनुपात में
वृद्धि हो अथर्वा x के घटने पर y में भी उसी अनुपात में कमी हो तो ये राशियाँ अनुलोम समानुपाती कहलाती
हैं। हल करते समय दोनों ओर तीर का निशान एक ही दिशा में इस प्रकार लगाते हैं। ↓ ↓

3. जब चार राशियाँ प्रतिलोम समानुपात में होती हैं तब अन्त की दो राशियों के अनुपात को उलटकर
(विलोम रूप में) लिखा जाता है।

4. प्रतिलोम समानुपाती की दोनों राशियों को विपरीत दिशाओं में इंगित करने वाले तीरों (↓ ↑) से

प्रदर्शित करने से प्रश्नों के हल में सुविधा होती है।

5. आयु संबंधी संक्रियाओं तथा कुछ विशेष संक्रियाओं जैसे धूप में सुखाने, आँख से देखने, शारीरिक $\frac{5}{100}$ अंगों

से चलने आदि में अपवाद स्वरूप समानुपात या ऐकिक नियम का प्रयोग नहीं होता है।

6. प्रतिशतता एक तुलना विधि है। प्रतिशतता के लिए प्रति एक100पर मान निकाला जाता है, जैसेका अर्थ

प्रत्येक 100 पर 5 से है।

7. प्रतिशत के हमारे दैनिक जीवन में व्यापक उपयोग हैं :

(i) जब हमें किसी राशि का प्रतिशत ज्ञात हो तब संपूर्ण राशि ज्ञात कर सकते हैं।

(ii) यदि हमें किसी राशि के भागों में अनुपात दिया हो, तो हम उन्हें प्रतिशत में भी बदल सकते हैं।

(iii) किसी राशि का घ:ना या बढ़ना भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।

(iv) किसी वस्तु के क्रय-विक्रय में हुए लाभ या हानि को भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।

(v) उधार लिए गए धन पर ब्याज परिकलन के लिए उसकी दर प्रतिशत में ही दी जाती है।

8. बट्टा वस्तु के छपे मूल्य पर दी जाने वाली छू: है। इसे प्रतिशत में ज्ञात किया जाता है।

9. आयकर और बिक्रीकर के लिए भी प्रतिशत का उपयोग व्यावहारिक है।

10. साधारण ब्याज ज्ञात करने के लिए सूत्र $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$ का प्रयोग करते हैं।

11. किसी मूलधन पर लिया जाने वाला ब्याज एक ही ब्याज दर से प्रत्येक वर्ष के लिए समान होता है।

हमने सीखा है कि 500 रुपये मूलधन पर 5 प्रतिशत वार्षिक दर से प्रत्येक वर्ष के लिए ब्याज 25 रुपये होगा

और 3 वर्ष के लिए 75 रुपये तथा 5 वर्ष के लिए 125 रुपये ।

12. बैंकों के साथ ही साथ अन्य व्यापारों में भी ब्याज पर ब्याज लेने का प्रचलन है। इस विधि से परिकलन

को चक्रवृद्धि परिकलन तथा प्राप्त ब्याज को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं। इस प्रकार प्राप्त चक्रवृद्धि ब्याज को

मूलधन में जोड़ने पर चक्रवृद्धि मिश्रधन प्राप्त होता है।

13. ऐकिक नियम विधि से भी हम अनेक से एक और फिर वांछित के लिए मान ज्ञात कर लेते हैं।

14. चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ है, जहाँ A =मिश्रधन

p= मूलधन

r= वार्षिक ब्याज दर

n= समय वर्ष में

15. ऊपर अंकित सूत्र का प्रयोग दैनिक जीवन के अनेक पहलुओं के लिए उपयोगी है। केवल मिश्रधन ही नहीं

बल्कि जनसंख्या वृद्धि, कमी, पर्यावरण, पैदावार आदि के लिए भी इस सूत्र की उपादेयता है।

16. कर एवं कर के प्रकार

आर्यभट्ट प्रथम (476 ई.)

इनका जन्म स्थान पटना (बिहार) है। आर्यभट्ट खगोलविद तो थे ही साथ ही प्रख्यात गणितज्ञ भी थे। उन्हें शून्य का ज्ञान था तथा ज् का मान 3.1416 निकाल लिया था। इन्होंने रेखागणित के क्षेत्र में भी त्रिज्यामिति तथा ज्या व कोटिज्या की विवेचना की।

अंकगणित के क्षेत्र में इन्होंने वर्गमूल, घनमूल ज्ञात करने की विधियों का उल्लेख किया। ज्यामिति में त्रिभुजों, चतुर्भुजों और वृत्तों के क्षेत्रफलों का तथा ठोसों के आयतन के सूत्र भी दिये।

उत्तरमाला

अभ्यास 7 (a)

1. $\frac{1}{2}$; **2.** (d) ; **3.** (c) 108 किमीप्रति घंटा **4.** x 3, y = 100, 250; **5.** 40 रुपये; **6.** 2000 रुपये; **7.** 42 रुपये; **8.** 50 मिनट:; **9.** 28 किलोग्राम; **10**. 21 सेकेन्ड

अभ्यास 7 (b)

1. 16 किमी प्रति घंटा; **2.** 60 किमी प्रति घंटा; **3.** 5 घंटे 20 मिनट:; **4.** 2 दिन में; **5.** 15 दिन; **6.** 4 घंटे में; **7.** 49 दिन; **8.** 800लीटर; **9.** 45 दिन; **10.** 8 घंटे; **11.** 6 दिन; **12.** 59040;

13. 10 :1, 20 : 1, नहीं;

अभ्यास 7 (c)

1. (i) 800, (ii) 15000, (iii) 240000; **2.** 1800 रुपये; **3.** 6000; **4.** 400 ग्राम, 120 ग्राम, 480 ग्राम; **5.** 480 पुरुष, 360 स्त्रियाँ, 360 बच्चे; **6.** 400 ग्राम; **7.** 38%, 2000 **8.** 12.5%

अभ्यास 7 (d)

1. 15% लाभ; **2.** 20% हानि; **3.** 5725 रुपये; **4.** 13965 रुपये; **5.** 20 रुपये; **6.** 1600 रुपये **7.** ₹ 1269.84 की हानि

अभ्यास 7 (e)

1. 140 रुपये; **2.** 90 रुपये, 1590 रुपये; **3.** 308 रुपये; 1908 रुपये; **4.** 800 रुपये; **5.** 5%; **6.** 7%; **7.** 5वर्ष; **8.** 10%; **9.** 4 वर्ष; **10.** 20वर्ष **11**. 1269.84 की हानि **12.** ₹300

13. ₹664 **14.** 20% **15.** 10% **16.** ₹2000

अभ्यास 7 (f)

1. (a)(iii)6₹;(b)

(ii) ₹20; **2.** ₹82, **3.** ₹102; **4.** ₹504; **5.** ₹124; **6.** ₹98.56; **7.** ₹122.40, **8.** ₹ 1261; **9.** ₹2025

अभ्यास 7 (g)

1. ₹105; **2.** ₹ 41; **3.** ₹1331; **4.** ₹10648; **5.** ₹ 3993, ₹ 993, **6.** ₹164; **7.** ₹5 10; **8.** ₹ 6655; **9.** ₹ 2704;

10. ₹1681, ₹ 81; **11.** ₹ 5780

अभ्यास 7 (h)

1. ₹441; **2.** ₹605; **3.** ₹51; **4.** ₹331; **5.** ₹2522; **6.** ₹204; **7.** ₹1458, ₹ 208; **8.** ₹10580; **9.** ₹2662; **10.** ₹2916

अभ्यास 7(i)

2. ; **3.** ₹5,500; **5.** ₹1180; **6.** ₹21428.57; **7.** ₹295,

दक्षता अभ्यास 7

1. (c)12.5मी;**2.**(c) 8 दिन; **3.** (a) 20 दिन में; **4.** (b) 10 मजदूर; **5.** 6000 रुपये; **6.** 72किमी/घंटा; **7.** 110 किमी; **8.** 1100 लड़के; **9.** 45 प्रतिशत; **10.** 400 रुपये; **11.** 576रुपये; **12.** 252.20 रुपये; **13.** 5832 रुपये

इकाई - 8 व्यंजकों का गुणनफल एवं सर्वसमिकाएँ

B14EAL

- **व्यंजकों का गुणनफल**
- **सर्वसमिकाएँ :**
    - $(a + b)^2 = a^2 + 2\ ab + b^2$
    - $(a - b)^2 = a^2 - 2\ ab + b^2$
    - $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$
- **समीकरण एवं सर्वसमिका में अंतर**
- **सर्वसमिकाओं का अनुप्रयोग**

भूमिका

हम $2\ x$, $x + 5$, $y - 3$, $- 3x + 4$, $6y - 12$ इत्यादि जैसे बीजीय व्यंजकों से परिचित हैं। इस अध्याय में हम एक पदीय व्यंजक में एक पदीय व्यंजकों का गुणा, दो पदीय व्यंजकों का गुणा तथा बहुपदीय व्यंजकों का गुणा स्तम्भ विधि और पंक्ति विधि से सीखेंगे। बीजगणित में व्यंजकों (expressions) को केन्द्रीय अवधारणा माना जाता है।

1. एक पदीय बीजीय व्यंजकों का गुणा

(i) बीजीय व्यंजक में संख्या का गुणा

आप कुछ ऐसी परिस्थितियों के बारे में सोच कर बताइए जिसमें बीजीय व्यंजकों का गुणा करना पड़ता है। सबीना ने उत्तर दिया कि किसी भी वस्तु को खरीदते समय उसका मूल्य

ज्ञात करने के लिए वस्तु की मात्रा में उसके क्रय दर का गुणा करना पड़ता है। जैसे

यदि 5 किग्रा आम x रुपये प्रति किग्रा के दर से खरीदना हो तो 5 किग्रा आम का मूल्य ज्ञात करने के लिए 5 किग्रा को x रुपये से गुणा करना पड़ेगा।

मूल्य $= 5\times x$

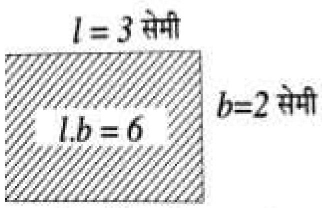
$= 5x$

अत: 5 किग्रा आम का मूल्य 5x होगा।

इसी प्रकार

यदि किसी आयत की लम्बाई l=3 सेमी और चौड़ाई b=2 सेमी है तो इस आयत का क्षेत्रफल ज्यामितीय रूप से बने चित्र के अनुसार निरूपित होगा। (आकृति 8.1)

क्षेत्रफल= लम्बाई ×चौड़ाई $= l \times b$



आकृति 8.1

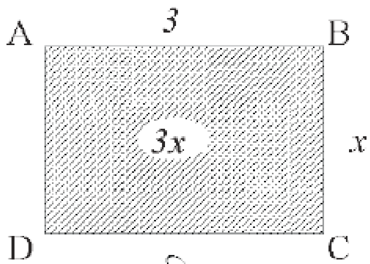
=3सेमी × 2 सेमी

=6 वर्ग सेमी

एक पदी को एक पदी से गुणा करना

$x \times 3 = x + x + x = 3 \times x = 3\,x$

ज्यामितीय द=ष्टि से यदि उपरोक्त कथन एक आयत जिसकी लम्बाई 3 इकाई तथा चौड़ाई x इकाई दर्शाता है तो इसका क्षेत्रफल 3x वर्ग इकाई को निरूपित करता है। जिसे पाशर्वांकित ़चित्र में आच्छादितकिया गया है। आकृति 8.2



आकृति 8.2

इसी प्रकार

- $2x \times 4 = 2x + 2x + 2x + 2x = 4 \times (2x) = 8x$
- $3y \times 5 = 3y + 3y + 3y + 3y + 3y = 5 \times (3y) = 15y$
- $4 \times 2x = (4 \times 2)x = 8x$
- $5 \times 3y = (5 \times 3)y = 15y$

अब निम्नलिखित गुणनफलों पर ध्यान दीजिए -

i. $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3xy$

ii. $3x \times 4y = 3 \times 4 \times x \times y = 12xy$

iii. $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y$

ध्यान दीजिए एक पदियों के गुणनफल भी एक पदी होते हैं।

प्रयास कीजिए :

इसी प्रकार निम्नांकित व्यंजकों का गुणा कीजिए तथा ज्यामितीय रूप में निरूपित कीजिए।

(i) $2x \times 6$ **(ii)** $5 \times 4y$

अत: हम प्राप्त करते हैं कि

किसी बीजीय व्यंजक को किसी संख्या से गुणा करने के लिए संख्या को बीजीय व्यंजक के गुणांक की संख्या से गुणा करते हैं।

(ii) समान आधार वाले घातांकीय व्यंजकों का गुणा

हम जानते हैं कि

$3x \times x = 3x^2$

इसी प्रकार, $4x^2 \times 5x^3 = (4 \times 5)\, x \times x \times x \times x \times x = 20x^5$

देखिए, दो सजातीय आधार वाले पदों के गुणनफल का घातांक, दोनों पदों के घातांकों के योगफल के बराबर है। अर्थात् $x^2 \times x^3 = x^5 = x^{2+3}$

$y^3 \times y^2 \times y = y \times y \times y \times y \times y \times y = y^6$

या $y^3 \times y^2 \times y = y^{3+2+1} = y^6$

इसी प्रकार $z^3 \times z^2 \times z^3$ का गुणा करके देखिए।

उपर्युक्त से हम पाते हैं कि

समान आधार वाले बीजीय व्यंजकों का गुणनफल उसी आधार पर उनके घातांकों के योगफल के बराबर होता है।

(iii) विभिन्न चर वाले एक पदीय व्यंजकों का गुणा

चर राशि का तात्पर्य यह है कि इसका मान स्थिर नहीं है।

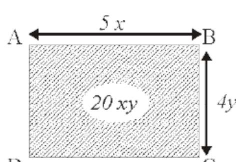
$x \times y$ को xy लिखते हैं।

अर्थात् $x \times y = xy$

या, $x \times y = xy$

इसी प्रकार $x \times y \times z = xyz$

तथा $a \times b \times c = abc$



आकृति 8.3

या, $a \times b \times c = abc$

गुणनफल में अक्षरों (चर राशियों) के बीच के गुणन चिह्न (×) को नहीं लिखते हैं। इसी प्रकार अचर तथा चर के गुणनफल में गुणन चिह्न (×) नहीं लिखते हैं। जैसे; $2 \times\times x = 2x$

पुन: $y \times x = yx = xy$ (गुणा के क्रम-विनिमेय नियम द्वारा)

$b \times a = ba = ab$

$d \times c = dc = cd$

निम्नांकित गुणन की क्रिया को देखिए :

(i) $5x \times 4y = 5 \times x \times 4 \times y$ ज्यामितीय रूप में यह निम्न आकृति 8.3 में आच्छादित क्षेत्र को दर्शाता है -

$= (5 \times 4) \times (x \times y)$

$= 20 \times x\,y$

$= 20\,xy$

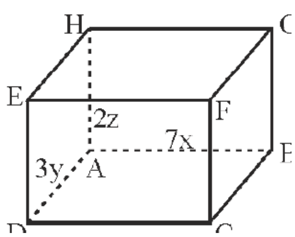
(ii) $7x \times 3y \times 2z = 7 \times x \times 3 \times y \times 2 \times z$

$= 7 \times 3 \times 2 \times (x \times y \times z)$

$= 42 \times x\,y\,z$

$= 42\,xyz$

ज्यामितीय द=ष्टि से यह एक घनाभ को निरूपित करता है जिसकी लम्बाई (AB) 7x इकाई, चौड़ाई (AD) 3y इकाई, ऊँचाई (AH) 2z इकाई है जैसा कि आकृति 8.4 में दर्शाया गया है तथा इसका आयतन 42xyz घन इकाई है।



आकृति 8.4

(iii) $4x^2 \times (-2y) \times (-3x) = 4 \times x^2 \times (-2) \times y \times (-3) \times x$

$= 4 \times (-2) \times (-3) \times x^2 \times x \times y$

$= (-8) \times (-3) \times x^{2+1} \times y$

$= 24 \times x^3 y$

$= 24\ x^3y$

ध्यान दीजिए :

हम जानते हैं कि माप ऋणात्मक संख्या में नहीं होती है, अत: प्रत्येक बीजीय गुणक को ज्यामितीय दृष्टि से निरूपित नहीं कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए :

इसी प्रकार निम्नांकित बीजीय व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $3\ z^2 \times 2\ y^2 \times (-5\ x^2)$

(ii) $2\ x^2 \times (-4\ x^3) \times (-3\ y^2)$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों से हम देखते हैं कि

(i) बीजीय व्यंजकों के गुणनफल का संख्यात्मक गुणांक, व्यंजकों के संख्यात्मक गुणांकों का गुणनफल होता है।

(ii) बीजीय व्यंजकों के गुणनफल का बीजीय गुणांक व्यंजकों के चर भागों का गुणनफल होता है।

उदाहरण **1:** $3\ x^2$ को 5xy से गुणा कीजिए।

हल : प्रथम विधि (पंक्ति गुणा)

$3\ x^2 \times 5\ x\ y = 3 \times x^2 \times 5 \times x \times y$

$= 3 \times 5 \times x^2 \times x \times y$

$= 15 \times x^{2+1} \times y$

$= 15\, x^3\, y$

द्वितीय विधि (स्तम्भवार गुणा)

$$\begin{array}{r} 3\,x^2 \\ \times\ 5xy \\ \hline 15\,x^3\,y \end{array}$$

उदाहरण 2: $(-4x^2)\times(-3\,ay)\times\left(-\frac{2}{3}bx\right)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $(-4x^2)\times(-3\,ay)\times\left(-\frac{2}{3}bx\right) = (-4)\times x^2\times(-3)\times a\times y\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times b\times x$

$= \left((-4)\times(-3)\times\frac{(-2)}{3}\right)\times(x^2\times a\times y\times b\times x)$

$= \left(12\times\frac{(-2)}{3}\right)\times(a\times b\times x^2\times x\times y)$

$= -8\times ab\, x^{2+1}\, y$

$= -8\, a\, b\, x^3 y$

उदाहरण 3: $6\,x\,y\times\frac{2}{3}x^2$ का गुणनफल ज्ञात कर मान ज्ञात कीजिए, यदि $x = 1, y = 2.$

हल : $6\,x\,y\times\frac{2}{3}x^2 = \left(6\times\frac{2}{3}\right)\times x\times y\times x^2$

$= 4\times x\times x^2\times y$

$= 4\times x^{1+2}\times y$

$= 4\,x^3\,yz^2$

x और y के मान प्रतिस्थापित करने पर

$4\,x^3\,y = 4\times 1^3\times 2$

$= 4\times 1\times 2$

$= 8$

अभ्यास 8 (a)

1. निम्नांकित के मान बताइए।

(i) $4x\times(-7x)$

(ii) $(-6x)\times 5x^2$

(iii) $3\,x^2\,y\times 7\,x\,y^2$

2. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $4\,x^2\times 3\,x^5$ **(ii)** $3\,y^2\times 5\,y^3\times y$ **(iii)** $5\,x\,y\times(-3\,x)$

(iv) $(-4\,a^2\,y)\times(-b\,x^2)$ **(v)** $(-3\,x^2\,y)\times(-5\,x\,y^2)$ **(vi)** $\left(-\frac{3}{8}x^4yz\right)\times\left(-16yz^2\right)$

(vii) $(2\,p)\times(-3\,q)\times(-4\,p\,q)$

3.निम्नांकित के गुणनफल ज्ञात कर मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x^2\times\ 7\,x^5\times\ \frac{1}{7}x^3\times(-6\,x)$, यदि $x = 1$

(ii) $2\,x\times(-10\,x\,y^2)\times 3\,x^2\,y$,यदि $x = 1, y = 2$

4.एक खेत में 2x क्यारियाँ हैं। प्रत्येक क्यारी में xy पंक्तियाँ हैं। प्रत्येक पंक्ति में y^2 टमाटर के पौधे लगे हैं। ज्ञात कीजिए :

(i) खेत में कुल कितने पौधे लगे हैं ?

(ii)यदि $x = 3$, $y = 2$, तो कुल पौधों की संख्या कितनी है ?

2. एकपदीय व्यंजक और बहुपदीय व्यंजक का गुणा

हम जानते हैं कि

$5 \times 16 = 5\ (10 + 6)$ और $7 \times 28 = 7 \times (30 - 2)$

$= 5 \times 10 + 5 \times 6 = 7 \times 30 - 7 \times 2$

$= 50 + 30 = 210 - 14$

$= 80 = 196$

हम इस प्रकार के परिकलनों में वितरण नियम का उपयोग करते हैं।

(i) $5\times(x + 4) = 5\times x + 5\times 4$

$= 5x + 20$

(ii) $8\times (3x + 2y) = 8\times 3x + 8\times 2y$

$= 24x + 16y$

(iii) $2x\times(4x - 3y) = 2x\times 4x - 2x\times 3y$

$= 8x^2 - 6xy$

(iv) $3x\times(5x^2 - 4y) = 3x\times 5x^2 - 3x\times 4y$

$= 15x^3 - 12xy$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $5y(3x^2 - 2z)$ **(ii)** $2y(5x + 2x^2)$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि

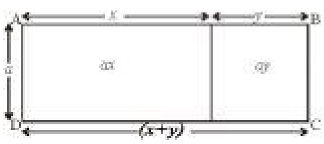
एकपदीय व्यंजक से बहुपदीय व्यंजक में गुणा करने के लिए एक पदीय व्यंजक से बहुपदीय व्यंजक के प्रत्येक पद में गुणा करते हैं।

ज्यामितीय निरूपण एवं सत्यापन : $a(x + y) = ax + ay$

a तर्था xy के गुणनफल को निम्नांकित आकृति 8.5 द्वारा दर्शाया जा सकता है।

आयतABCD का क्षेत्रफल=आयत AEFD का क्षेत्रफल + आयत EBCF का क्षेत्रफल

$\therefore a(x + y) = ax + ay$



आकृति 8.5

उदाहरण 1. : $5xy$ और $3x^2 + xy$ का गुणा कीजिए।

हल : प्रथम विधि (पंक्ति विधि)

$5xy \times (3x^2 + xy) = (5xy \times 3x^2) + (5xy \times xy)$

$= (5 \times 3)\, x \times y \times x^2 + 5\, x \times y \times x \times y \times$

$= 15\, x^{1+2} y + 5\, x^{1+1} \times y^{1+1}\ 15\, x^3 y + 5\, x^2 y^2$

$= 15\,x^3\,y + 5\,x^2\,y^2$

दूसरी विधि (स्तम्भ विधि)

$3\,x^2 + xy$

$\underline{\quad\quad 5\,x\,y}$

$15\,x^3 y + 5\,x^2\,y^2$

उदाहरण 2. : $x\,(y - z) + y\,(z - x) + z(x - y)$ को सरल कीजिए।

हल : $x\,(y - z) + y\,(z - x) + z(x - y)$

$= xy - xz + yz - yx + zx - zy$

$= xy - xz + yz - xy + xz - yz$

$= xy - xy - xz + xz + yz - yz$

$= 0$

अभ्यास 8 (b)

1. गुणा कीजिए :

(i) $-a - b$ और $-x$ का **(ii)** $2y$ और $(y^2 + 5y)$ का

(iii) $5a - 7b + c$ और $3y$ का **(iv)** $3x$ और $(x^2 - 5\,x + 4)$ का

2. सरल कीजिए :

(i) $2\,x^2\,y\,(x - y + z)$ **(ii)** $3\,xy^2\,(2x - 3xy + 7y)$

(iii) $(y^2 - 8y)\,(-y)$ **(iv)** $2ab\,(5a - 7b + c)$

3. सरल कीजिए :

(i) $2x\,(3x + 5y) - 5y\,(2x - 3y)$

(ii) $x\,(y - z) + 2y\,(z - x) + z\,(x - y)$

(iii) $y^2\,(y^2 + 1) - y^3\,(y + 1) + y\,(y^2 - y)$

(iv) $x(1 + x^2) - x^2(x - 1) - (x + x^2)$

4. एक विद्यालय में 2x कक्षाएँ हैं। प्रत्येक कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या $(x^3 + 2x + 2)$ है। ज्ञात कीजिए :

(i) विद्यालय में विद्यार्थियों की कुल संख्या कितनी है ?

(ii) यदि $x = 3$, तो विद्यालय में कुल कितने विद्यार्थी हैं ?

5. एक रेलगाड़ी की चाल $(2x^2 + x + 4)$ किमी प्रति घंटा है।

(i) वह 3x घंटे में कितनी दूरी तय करेगी ?

(ii) यदि x=5, तो उपर्युक्त समय में रेलगाड़ी द्वारा चलित दूरी ज्ञात कीजिए।

6. एक न्याय पंचायत में $2x + 3$ ग्राम सभायें हैं। प्रत्येक ग्राम सभा में $x^2 + 5x + 6$ नलकूप हैं। तो न्याय पंचायत में कुल कितने नलकूप हैं।

7. एक विकास खण्ड में $5x + 3$ विद्यालय में स्वच्छता के कारण प्रत्येक विद्यालय में $5x - 3$ बालिकाएँ बढ़ जाती हैं, तो विकास खण्ड में कितनी बालिकाएँ बढ़ जाती हैं।

8.बाल दिवस के अवसर पर $x + 5$ विद्यालयों के बच्चों द्वारा वृक्षारोपण किया गया। प्रत्येक विद्यालय के बच्चों ने $x^2 - 5x + 25$ वृक्ष लगाए, तो बच्चों द्वारा कितने वृक्ष लगाये गये।

8.3. बहुपदीय व्यंजकों का गुणा

हम जानते हैं कि,

$(a + b) \times p = ap + bp$

यदि $p = (c + d)$

तो, $(a + b) \times (c + d) = a(c + d) + b(c + d)$

$= ac + ad + bc + bd$

इसी प्रकार,

$(x + y) \times (z + 2) = x\ (z + 2) + y\ (z + 2)$

$= xz + 2x + yz + 2y$

तथा $(2x + 3)\ (y - z) = 2x\ (y - z) + 3(y - z)$

$= 2\ xy - 2xz + 3y - 3z$

प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित को सरल कीजिए :

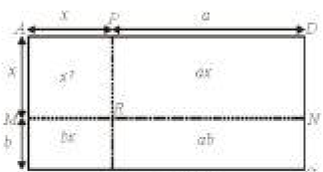
(i) $(p + q) \times (r + y)$ **(ii)** $(2a - b) \times (3c + 2d)$

अत: हम देखते हैं कि

दो बहुपदीय व्यंजकों का परस्पर गुणा करने के लिए, प्रथम बहुपद के प्रत्येक पद से द्वितीय बहुपद के प्रत्येक पद में गुणा करते हैं।

ज्यामितीय निरूपण एवं सत्यापन : $(x + a)\ (x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

आयतABCD का क्षेत्रफल $= (x + a)\ (x + b)$



आकृति 8.6

आयत AMND का क्षेत्रफल$= x(x + a)$

आयतMBCN का क्षेत्रफल $= b(x + a)$

पुन: आयत ABCD = आयतAMND + आयत MBCN

= वर्ग AMRP +आयत PRND +आयतMBQR + आयत RQCN

$\therefore\ (x + a)\ (x + b) = x(x + a) + b(x + a)$

$= x^2 + ax + bx + ab$

उदाहरण 1 : $(2x + 3y)$ और $(3x – 4y)$ का गुणा कीजिए।

हल : पंक्ति विधि

$(2x + 3y) . (3x – 4y)$

$= 2x \ (3x – 4y) + 3y \ (3x – 4y)$

$= 6x^2 – 8xy + 9xy – 12y^2$

$= 6x^2 + xy – 12y^2$

स्तम्भ विधि

$2x + 3y$

$\times (3x – 4y)$

$6x^2 + 9xy$ (3x से गुणा)

$– 8xy – 12y^2$ (–4y से गुणा)

$6x^2 + xy – 12y^2$

उदाहरण 2: $(2x^2 + y^2)$ में $(3x – 5y^2)$ से गुणा कीजिए। यदि $x = 2$, $y = 1$, तो गुणनफल की सत्यता की

जाँच कीजिए।

हल : $(2x^2 + y^2) \times (3x – 5y^2) = 2x^2 (3x – 5y^2) + y^2 (3x – 5y^2)$

$= 6x^3 – 10x^2 y^2 + 3xy^2 – 5y^4$

सत्यापन $x = 2$, $y = 1$ प्रतिस्थापन करने पर,

$(2x^2 + y^2) = 2{\times}2^2 + 1^2 = 8 + 1 = 9$

$3x - 5y^2 = 3 \times 2 - 5 \times 1^2 = 6 - 5 = 1$

बायाँ पक्ष $= (2x^2 + y^2) \times (3x - 5y^2) = 9 \times 1 = 9$

दायाँ पक्ष $= 6x^3 - 10x^2y^2 + 3xy^2 - 5y^4$

$= 6 \times 2^3 - 10 \times 2^2 \times 1^2 + 3 \times 2 \times 1^2 - 5 \times 1^4$

$= 48 - 40 + 6 - 5$

$= 54 - 45$

$= 9$

बायाँ पक्ष=दायाँ पक्ष

उदाहरण3. : $(5x^2 - 6x + 9)$ में $(2x - 3)$ से गुणा कीजिए।

हल

$$\begin{array}{r}
5x^2 - 6x + 9 \\
\times \quad 2x - 3 \\
\hline
x^3 - 12x^2 + 18x \qquad \\
-15x^2 + 18x - 27 \\
\hline
x^3 - 27x^2 + 36x - 27 \\
\hline
\end{array}$$

अभ्यास8(c)

गुणनफल ज्ञात कीजिए :

1. $(x + 2)(x + 5)$ **2.** $(x - 4)(x + 7)$

3. $(x - 3)(x - 8)$ **4.** $(x^2 + 5)(x^2 - 7)$

5. $(3x + 8)(4x - 7)$ **6.** $(5x - 3y)(3x + 4y)$

7. $(x^2 + 2xy + y^2)(x - y)$ **8.** $(2x^2 + 3x - 7)(5x + 4)$

9. $(x^2 - xy + y^2)$ में $(x + y)$ से गुणा कीजिए। उत्तर की जाँच कीजिए, यदि $x = 3, y = 2$.

10. $(x^2 + xy + y^2)$ में $(x^2 - xy + y^2)$से गुणा कीजिए। उत्तर की जाँच कीजिए, यदि $x = 2, y = 1$.

11. यदि कविता ने पुस्तक विक्रेता से $(3x + 7)$ कापियाँ खरीदीं। यदि प्रत्येक कापी का मूल्य $(2x - 1)$रुपये हो, तो

(i) कुल कापियों का मूल्य कितना है ?

(ii) यदि x=5, तो कविता ने पुस्तक विक्रता को कितने रुपये दिये ?

8.5.सर्वसमिकाएँ

1. समीकरण तथा सर्वसमिका में भेद

चर्चा कीजिए एवं निष्कर्ष निकालिए

बीजीय कथन $2x = x + 3$ में चर् x के वि भिन्न मानों के लिए कथन के बायें पक्ष एवं दायें पक्ष का दी गयी सारणी में अवलोकन कीजिए :

x	बायाँ पक्ष (L.H.S.) $2x$	दायाँ पक्ष (R.H.S.) $x+3$
1	2	4
2	4	5
3	6	6
4	8	7

(i) $x = 1$ के लिए बायाँ पक्ष का मान कितना है ?

(ii) x के किस मान के लिए बायें पक्ष का मान 8 है ?

(iii) $x = 5$ के लिए दायें पक्ष का मान कितना होगा ?

(iv) x के किस मान के लिए बायाँ पक्ष एवं दायाँ पक्ष समान हैं ?

सारणी से स्पष्ट है कि x=3 के लिए, बायाँ पक्ष =दायाँ पक्ष

ऐसे समानता सूचक बीजीय कथन जो चर x के कुछ निश्चित मान (या मानों) के लिए संतुष्ट होते हैं, समीकरण कहलाते हैं और चर का वह निश्चित मान समीकरण का हल होता है।

अब बीजीय कथन $x(x+1) = x^2 + x$ में x के विभिन्न मानों के लिए दोनों पक्षों का दी गयी सारणी में अवलोकन कीजिए:

x	बायाँ पक्ष (L.H.S.) $x(x+1)$	दायाँ पक्ष (R.H.S.) x^2+x
1	2	2
2	6	6
3	12	12
4	20	20

(i) $x = 1$ के लिए बायाँ पक्ष का मान कितना है ?

(ii) x के किस मान के लिए बायें पक्ष का मान 20 है ?

(iii) $x = 3$ के लिए दायाँ पक्ष कितना है ?

(iv) x का कौन सा मान है,जिसके लिए दोनों पक्षों के मान समान नहीं हैं ?

यहाँ हम देखते हैं किx के प्रत्येक मान के लिए बायाँ पक्ष= दायाँ पक्ष

ऐसा समानता सूचक बीजीय कथन जो चर के प्रत्येक मान के लिए सत्य होता है, सर्वसमिका कहलाता है।

उदाहरण 1. $x^2 + 3x - 5 = 1$ सर्वसमिका होने की जाँच कीजिए।

हल **:** $x = 0$ के लिए बायाँ पक्ष $= x^2 + 3x - 5$

$= 0 + 0 - 5$

$= -5$

दायाँ पक्ष $= 1$

... $x = 0$ के लिए बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष

अत: $x^2 + 3x - 5 = 1$, सर्वसमिका नहीं है।

अभ्यास 8 (d)

1. निम्नलिखित में समीकरण तथा सर्वसमिका छाँ:कर अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए :

(i) $x + 1 = 4$ **(ii)** $2(x + 1) = 2x + 2$

(iii) $3x = 2x + x$ **(iv)** $2x - 1 = x$

2.दिखाइए कि

(i) $3x(x + 1) = 3x^2 + 3x$ एक सर्वसमिका है।

(ii) $x^2 - 1 = 8$ एक सर्वसमिका नहीं है।

(iii) $2x(x + 3) = 2x^2 + 6x$ एक सर्वसमिका है।

(iv) $5x - 1 = 9$ एक समीकरण है।

8.5.1 (i) सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

हम जानते हैं कि $(a + b)^2 = (a + b)$ में $(a + b)$ से गुणा

पंक्तिवार गुणा

$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

स्तम्भवार गुणा

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times \ (a + b) \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore (a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

आंकिक सत्यापन : माना $a = 2$, $b = 3$, lees

बायाँ पक्ष : $(a + b)^2 = (2 + 3)^2 = 5^2 = 25$

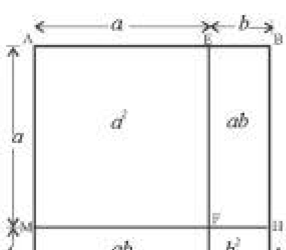
दायाँ पक्ष : $a^2 + 2\,a\,b + b^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3 + 3^2$

$= 4 + 12 + 9 = 25$

$\therefore$ **बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष**

ज्यामितीय निरूपण एवं सत्यापन :

आकृति 8.7 में ABCD एक वर्ग है जिसकी



आकृति 8.7

भुजा = $a + b$

$\therefore$ वर्ग ABCD का क्षेत्रफल= $(a + b)^2$

वर्ग AEFM का क्षेत्रफल= a^2

वर्ग EBHF का क्षेत्रफल= ab

वर्ग MFGD का क्षेत्रफल= ab

वर्ग FHCG का क्षेत्रफल $=b^2$

चूंकि वर्ग ABCD का क्षेत्रफल =

वर्ग AEFM का क्षेत्रफल + आयत EBHF का क्षेत्रफल + आयत MFGD का क्षेत्रफल + वर्ग FHCG का क्षेत्रफल

$\therefore (a + b)^2 = a^2 + a\,b + a\,b + b^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

(पहला पद + दूसरा पद)^2 = (पहला पद)^2 + 2(पहला पद) × (दूसरा पद) + (दूसरा पद)^2

उपर्युक्त से यह अवलोकित होता है कि

दो पदों के योग का वर्ग, उन पदों के वर्गों के योगफल में उन्हीं पदों के गुणनफल के दो गुने के जोड़ने से प्राप्त होता है।

उदाहरण 1 : $(x + 5)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

इसमें a=x तथा b=5 प्रतिस्थापित करने पर,

$(x + 5)^2 = x^2 + 2\,x \times 5 + 5^2$

$= x^2 + 10\,x + 25$

उदाहरण 2 : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $(a + b) = a^2 + 2\,ab + b^2$

इसमें a=x तथा $b = \frac{1}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2\,x \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$\therefore$

अभ्यास 8 (e)

सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ की सहायता से निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

1. $(x + 3)^2$ **2.** $(2\,x + 1)^2$ **3.** $(3\,x + 2)^2$

4.$(2\,x + y)^2$ **5.** $(2\,y + z)^2$ **6.** $(2 + x)^2$

7. एक बाग में $(x + 2\,y)$ पंक्तियाँ हैं। प्रत्येक पंक्ति में $(x + 2\,y)$ पेड़ लगे हैं। ज्ञात कीजिए :

(i) बाग में कुल कितने पेड़ हैं ?

(ii) यदि $x = 3, y = 2$, तो बाग में पेड़ों की कुल कितनी संख्या हैं ?

8.एक वर्गाकार खेत की भुजा $(3\,x + y)$ मी लम्बी है। खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8.5.2 (ii) सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

हम जानते हैं कि $(a - b)^2 = (a - b)$ में $(a - b)$ का गुणा।

गुणन की क्रिया :

पंक्ति विधि

$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$

$= a(a - b) - b(a - b)$
$= a^2 - ab - ba + b^2$
$= a^2 - ab - ab + b^2$
$= a^2 - 2\,ab + b^2$

स्तम्भ विधि

$$\begin{array}{r} a - b \\ \times\, a - b \\ \hline a^2 - ab \quad\quad \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2\,ab + b^2 \end{array}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2}$

आंकिक सत्यापन :

माना $a = 5$, $b = 3$, तो

बायाँ पक्ष: $(a - b)^2 = (5 - 3)^2 = (2)^2 = 4$

दायाँ पक्ष : $a^2 - 2\,ab + b^2$

$= 5^2 - 2\times5\times3 + 3^2$

$= 25 - 30 + 9$

$= 25 + 9 - 30 = 34 - 30 = 4$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

इसी प्रकार, $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

$= a(a - b) - b(a - b)$

$= a^2 - ab - ba + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 \quad ab = ba$

अत:

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

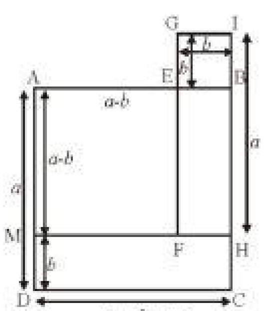
अत: यह एक सर्वसमिका है।

प्रयास कीजिए :

$a = 4, b = 1$ के लिए $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का सत्यापन कीजिए।

तथा b के प्रत्येक मान के लिए $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ सत्य है।

का ज्यामितीय निरूपण एवं सत्यापन



आकृति ९.८

वर्ग AMFE का क्षेत्रफल = $(a - b)^2$

वर्ग ADCB का क्षेत्रफल= a^2

वर्ग MDCH का क्षेत्रफल= ab

वर्ग FHIG का क्षेत्रफल= ab

वर्ग EBIG का क्षेत्रफल= b^2

वर्ग AMFE= वर्ग ADCB + वर्ग EBIG – आयत MDCH –आयत FHIG

$\therefore (a - b)^2 = a^2 + b^2 - ab - ab$

$= a^2 - 2\,ab + b^2$

$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

(पहला पद – दूसरा पद)^2 = (पहला पद)^2 – 2 (पहला पद) × (दूसरा पद) + (दूसरा पद)^2

उपर्युक्त से अवलोकित होता है कि

दो पदों के अन्तर का वर्ग, उन दोनों पदों के वर्गों के योगफल में से उन्हीं पदों के गुणनफल के दो गुने को घटाने से प्राप्त होता है।

उदाहरण 1 : $(x - 7)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

इसमें a=x तथाb=7 रखें तो

$(x - 7)^2 = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2$

$= x^2 - 14\,x + 49$

उदाहरण 2 : $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

इसमें $a = x$, $b = \frac{1}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

अभ्यास 8 (f)

सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ की सहायता से मान ज्ञात कीजिए :

1. $(x - 5)^2$ **2.** $(5x - 7)^2$ **3.** $(2x - y)^2$

4. $(3x - 2y)^2$ **5.** $(3 - x)^2$ **6.** $(2y - z)^2$

7. एक वर्गाकार खेत की एक भुजा की माप $(3x - y)$ मी है। खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. एक खेत में $(x - 2y)$ क्यारियाँ हैं। प्रत्येक क्यारी में $(x - 2y)$पपीते के पौधे लगे हैं।

(i) खेत में कितने पपीते के पौधे हैं ?

(ii) यदि $x = 10$, $y = 1$, तो कुल पौधों की संख्या कितनी है ?

9. (i)एक कलम का मूल्य $(2x - y)$रुपये है। इसी प्रकार की $(2x - y)$ कलमों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $x = 6$, $y = 2$, तो कुल कलमों का कितना मूल्य होगा ?

8.5.3 (iii) सर्वसमिका $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

पंक्ति विधि

$(a + b) \times (a - b) = a(a - b) + b(a - b)$

$= a^2 - ab + ba - b^2$

$= a^2 - ab + ba - b^2$

$= a^2 - b^2 - ab - b^2$

स्तम्भ विधि

$$
\begin{array}{r}
a + b \\
\times \; a - b \\
\hline
a^2 + ab \qquad \\
- ab - b^2 \\
\hline
a^2 - b^2 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ **$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$**

आंकिक सत्यापन :

माना $a = 4$, $b = 1$, तो

बायाँ पक्ष $= (a + b)(a - b)$

= (4 + 1) (4 − 1) = 5× 3 = 15

दायाँ पक्ष : $a^2 – b^2$

= $4^2 – 1^2$ = 16 – 1 = 15

बायाँ पक्ष= दायाँ पक्ष

अब आप a=3,b=2 के लिए $(a + b) (a – b) = a^2 – b^2$ का सत्यापन कीजिए।

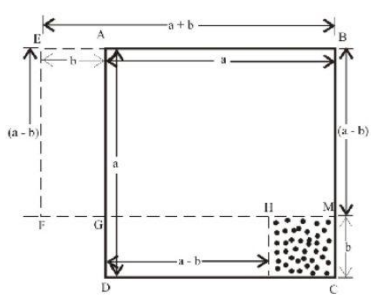
हम देखते हैं कि a तथा b के प्रत्येक मान के लिए $\boldsymbol{(a + b) (a – b) = a^2 – b^2}$ सत्य है।

अत: यह एक सर्वसमिका है।

ज्यामितीय निरूपण एवं सत्यापन

क्रिया कलाप

माना ABCD की भुजा a तथा वर्ग HMCI की भुजा b है। (आकृति 8.9)



आकृति 8.9

अत: वर्ग ABCD से वर्गHMCI अलग करें तो आकृति ABMHID बनती है जिसका क्षेत्रफल a2 –b^2 है। इसमें से आयतGHID, जिसकी लम्बाई a –b तथा चौड़ाई b है, को का:कर Aउ के बगल में EAGF के रूप में जोड़ने पर आयत EBMF प्राप्त होता है जिसका क्षेत्रफल = $(a + b) . (a – b)$

आयतEBMF का क्षेत्रफल =वर्गABCD का क्षेत्रफल – वर्ग HMCI का क्षेत्रफल

$\therefore (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

उपर्युक्त से अवलोकित होता है कि

दो पदों के योग तथा अन्तर का गुणनफल, उन पदों के वर्गों के अन्तर के समान होता है।

इसके अतिरिक्त एक और अधिक उपयोगी सर्वसमिका पर ध्यान दीजिए

$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$

$= x^2 + xb + ax + b^2$

$= x^2 + x(a + b) + b^2 \; (b+a = a+b)$

उदाहरण 1. : सर्वसमिका $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ की सहायता से $(x + 5)\times(x - 5)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

इसमें a=x तथा b=5 प्रतिस्थापित करने पर,

$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2$

$= x^2 - 25$

उदाहरण 2. :सर्वसमिका $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ की सहायता से $(3x + 2y) \times (3x - 2y)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

इसमें $a = 3x$ तथा $b = 2y$ को प्रतिस्थापित करने पर,

$(3x + 2y)(3x - 2y) = (3x)^2 - (2y)^2$

$= 9x^2 - 4y^2$

अभ्यास 8 (g)

सर्वसमिका $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए ::

1. $(5 + x)(5 - x)$ **2.** $(y + 4)(y - 4)$

3. $(2x + 3)(2x - 3)$ **4.** $(3x + 4y)(3x - 4y)$

5. सर्वसमिका का प्रयोग कर $(4x + 2y)(4x - 2y)$ का मान ज्ञात कीजिए तथा उत्तर की जाँच कीजिए, यदि $x = 2, y = 1$.

6. एक आयताकार मैदान की लम्बाई $(2x + 1)$मी तथा चौड़ाई $(2x - 1)$ मी है। आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. (i) एक पुस्तक का मूल्य $(3x + 1)$ रुपये है। इसी प्रकार की $(3x - 1)$पुस्तकों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ii)यदि $x = 3$, तो पुस्तकों की संख्या कितनी होगी ?

(iii) यदि $x = 4$, तो पुस्तकें खरीदने में कुल कितने रुपये लगे ?

सर्वसमिका के प्रयोग से निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए -

8. $153^2 - 147^2$

9. $(12.1)^2 - (7.9)^2$

10. $(983)^2 - (17)^2$

8.6. सर्वसमिकाओं का अनुप्रयोग

सर्वसमिकाओं का उपयोग द्विपद व्यंजकों के गुणन और संख्याओं के गुणन के लिए भी एक सरल वैकल्पिक विधि प्रदान करता है। सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके कुछ बड़ी संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करना सरल हो जाता है।

सर्वसमिकाओं के प्रयोग से कुछ संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करना सरल होता है।

उदाहरण 1 : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का प्रयोग करके 101^2 का मान ज्ञात कीजिए।

$101^2 = (100 + 1)^2$

$= 100^2 + 2\times 100\times 1 + 1^2$

$= 10000 + 200 + 1$

$= 10201$

उदाहरण 2 : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का प्रयोग करके 99^2 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $99^2 = (100 - 1)^2$

$= 100^2 - 2\times 100\times 1 + 1^2$

$= 10000 - 200 + 1$

$= 9800 + 1$

$= 9801$

उदाहरण3 : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ का प्रयोग करके 303 और 297 का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $303 \times 297 = (300 + 3)\times (300 - 3)$

$= 300^2 - 3^2$

$= 90000 - 9$

$= 89991$

उदाहरण 4 : यदि $a + \frac{1}{a} = 2$ तो $a^2 + \frac{1}{a^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :... $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2\times a\times\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2$ $\therefore$

$= a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$

$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2$

$a^2 + \frac{1}{a^2} = 4 - 2 = 2$

$\therefore$ $a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2$

$=2^2=4$

$a^2 + \frac{1}{a^2} = 4 - 2 = 2$

अभ्यास 8 (h)

सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

1. 51^2 **2.** 105^2

3. 201^2 **4.** 302^2

5. 1001^2 **6.** 49^2

7. 98^2 **8.** 95^2

9. 997^2 **10.** $(10.2)^2$

11. $(9.8)^2$ **12.** 103×97

13. 52×48 **14.** 10.5×9.5

15. यदि $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$, तो $a^2+\frac{1}{a^2}$ का मान ज्ञात कीजिए

16. यदि $a-\frac{1}{a}=0$ तो $a^2+\frac{1}{a^2}$ का मान ज्ञात कीजिए

सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

17. 78×82

18. 95×103

19. 501×502

दक्षता अभ्यास 8

निम्नलिखित के गुणनफल ज्ञात कीजिए :

1. $(2x^2y) \times (-3xy^2)$ **2.** $(11y^2z^2)$, $(5xyz)$
3. $x^6 \times 5x^3 \times 2y^2$ **4.** $7 \times (x+3)$
5. $-6 \times (-m-3)$ **6.** $ab(3a-5b)$
7. $(2x+3)(x+5)$ **8.** $(x-7)(x+9)$
9. $(5x-6y)(4x-3y)$ **10.** $(x+\mathrm{a})(x+\mathrm{b})$
11. **(i)** $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ तथा

(ii) $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ के सर्वसमिका होने की जाँच कीजिए।

सर्वसमिकाओं के प्रयोग से निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

12. $(2x+5)^2$

13. $(2x+3y)^2$

14. $(x-7)^2$

15. $(3m - 4n)^2$

16. $(m\,x - n\,y)^2$

17. $(7 + 3x)\,(7 - 3x)$

18. $(4a + 3b)\,(4a - 3b)$

19. निम्नलिखित को सरल कीजिए :

(i) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$
(ii) $x(2y - 3z) + y(3z - 2x) + 3z(x - y)$

20. यदि $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$, तो $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए :

21. यदि $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$, तो $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए :

22. दिखाइए

a. $\left(\frac{4}{3}m + \frac{3}{4}n\right)^2 - 2mn = \frac{16}{9}m^2 + \frac{9}{16}n^2$

b. $(4mn + 3n)^2 - (4mn - 3n)^2 = 48mn^2$

c. $(a - b)\,(a + b) + (b - c)\,(b + c) + (c - a)\,(c + a) = 0$

इस इकाई में हमने सीखा

1. किसी एक पदीय बीजीय व्यंजक में किसी संख्या से गुणा करने के लिए संख्या को बीजीय व्यंजक के गुणांक से गुणा करते हैं।

2. समान आधार वाले बीजीय व्यंजकों का गुणनफल उसी आधार पर उनके घातांकों के योगफल के बराबर होता है।

3. बीजीय व्यंजकों के गुणनफल का गुणांक, व्यंजकों के गुणांकों का गुणनफल तथा बीजीय व्यंजकों के गुणनफल का चर भाग, व्यंजकों के चर भागों के गुणनफल होता है।

4. एक पदीय व्यंजक से बहुपदीय व्यंजक से गुणा करने के लिए एकपदीय व्यंजक से बहुपदीय व्यंजक के प्रत्येक पद में गुणा करते हैं।

5. दो बहुपदीय व्यंजकों का परस्पर गुणा करने के लिए, प्रथम बहुपद के प्रत्येक पद से द्वितीय बहुपद के प्रत्येक पद में गुणा करते हैं।

6. व्यंजकों के गुणा को ज्यामितीय निरूपण से समझ सकते हैं।

7. समीकरण एवं सर्वसमिका में भेद :

- **ऐसे समानता सूचक कथन जो चर x के कुछ निश्चित मान के लिए संतुष्ट होते हैं, समीकरण कहलाते हैं और चर का वह निश्चित मान समीकरण का हल होता है।**
- **ऐसा समानता सूचक कथन जो चर के प्रत्येक मान के लिए सत्य होता है, सर्वसमिका कहलाता है।**

8.सर्वसमिका : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

का बीजीय सत्यापन तथा ज्यामितीय निरूपण द्वारा सत्यापन एवं उक्त सर्वसमिकाओं का अनुप्रयोग।

10. सर्वसमिकाएँ हमें संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करने के लिए सरल वैकल्पिक विधियाँ प्रदान करता है।

11. सामान्यत: एक अथवा अधिक पदों वाला व्यंजक जिसमें पदों के गुणांक शून्येतर हैं तथा चरों की घात ऋणेत्तर

है, बहुपद कहलाता है।

12. समान चरों से समान पद बनते हैं और इन चरों की घात भी समान होती है।

13. समान पदों के गुणांक समान होने आवश्यक नहीं है।

14. एक पदीय को एक पदीय से गुणा करने पर हमेशा एक पदीय प्राप्त होता है।

अभ्यास 8 (a)

1. (i) $-28x^2$, (ii) $-30x^3$, (iii) $21x^3y^3$; **2.** (i) $12x^7$, (ii) $15y^6$, (iii) $-15x^2y$, (iv) $4a^2bx^2y$, (v) $15x^3y^3$, (vi) $6x^4y^2z^3$, (vii) $24p^2q^2$; **3.** (i) $-6x^{11}$, -6 (ii) $-60x^4y^3$, -480; **4.** (i) $2x^2y^3$, (ii) 144

अभ्यास 8 (b)

1. (i) $ax + bx$, (ii) $2y^3 + 10y^2$, (iii) $15ay - 21by + 3cy$, (iv) $3x^3 - 15x^2 + 12x$; **2.** (i) $2x^3y - 2x^2y^2 + 2x^2yz$, (ii) $6x^2y^2 - 9x^2y^3 + 21xy^3$, (iii) $-y^3 + 8y^2$, (iv) $10a^2b - 14ab^2 + 2abc$; **3.** (i) $6x^2 + 15y^2$, (ii) $-xy + zy$, (iii) 0, (iv) 0; **4.** (i) $2x^4 + 4x^2 + 4x$, (ii) 210; **5.** (i) $6x^3 + 3x^2 + 12x$ किमी, (ii) 885किमी **6.** $2x^3 + 13x^2 + 27x + 18$, **7.** $25x^2 - 9$ **8.** $x^3 + 125$

अभ्यास 8 (c)

1. $x^2 + 7x + 10$; **2.** $x^2 + 3x - 28$; **3.** $x^2 - 11x + 24$; **4.** $x^4 - 2x^2 - 35$; **5.** $12x^2 + 11x - 56$; **6.** $15x^2 + 11xy - 12y^2$; **7.** $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$; **8.** $10x^3 + 23x^2 - 23x - 28$;**9.** $x^3 + y^3$; **10.** $x^4 + x^2y^2 + y^4$; **11.** (i) ` $(6x^2 + 11x - 7)$, (ii) ` 198

अभ्यास 8 (d)

1. (i) समीकरण, (ii) सर्वसमिका, (iii) सर्वसमिका, (iv) समीकरण।

अभ्यास 8 (e)

1. $x^2 + 6x + 9$; **2.** $4x^2 + 4x + 1$; **3.** $9x^2 + 12x + 4$; **4.** $4x^2 + 4xy + y^2$; **5.** $4y^2 + 4yz + z^2$; **6.** $4 + 4x + x^2$; **7.** (i) $x^2 + 4xy + 4y^2$, (ii) 49; **8.** $(9x^2 + 6xy + y^2)$ वर्ग मी

अभ्यास 8 (f)

1. $x^2 - 10x + 25$; **2.** $25x^2 - 70x + 49$; **3.** $4x^2 - 4xy + y^2$; **4.** $9x^2 - 12xy + 4y^2$; **5.** $9 - 6x + x^2$; **6.** $4y^2 - 4yz + z^2$; **7.** $9x^2 - 6xy + y^2$; **8.** (i) $x^2 - 4xy + 4y^2$, (ii) 64; **9.**(i) $(4x^2 - 4xy + y^2)$ रुपये; (ii) 100 रुपये

अभ्यास 8 (g)

1. $25 - x^2$; **2.** $y^2 - 16$; **3.** $4x^2 - 9$; **4.** $9x^2 - 16y^2$; **5.** $16x^2 - 4y^2$; **6.** $(4x^2 - 1)$ वर्गमी; **7.** (i) $(9x^2 - 1)$रुपये, (ii) 8, (iii) 143 रुपये

अभ्यास8 (h)

1. 2601; **2.** 11025; **3.** 40401; **4.** 91204; **5.** 1002001; **6.** 2401; **7.** 9604; **8.** 9025; **9.** 994009; **10.** 104.04; **11.** 96.04; **12.** 9991; **13.** 2496; **14.** 99.75; **15.** $\frac{17}{4}$; **16.**2

दक्षता अभ्यास 8

1. $-6x^3y^3$; **2.** $55xy^3z^3$; **3.** $10x^9y^2$; **4.** $7x + 21$; **5.** $6m + 18$; **6.** $3a^2b - 5ab^2$; **7.** $2x^2 + 13x + 15$; **8.** $x^2 + 2x - 63$; **9.** $20x^2 - 39xy + 18y^2$; **10.** $x^2 + ax + bx + ab$; **12.**$4x^2 + 20x + 25$; **13.** $4x^2 + 12xy + 9y^2$; **14.** $x^2 - 14x + 49$; **15.** $9m^2 - 24mn + 16n^2$; **16.** $m^2x^2 - 2mnxy + n^2y^2$; **17.** $49 - 9x^2$; **18.** $16a^2 - 9b^2$; **19.** (i) 0, (ii) 0; **20.** $\frac{82}{9}$;

21. $\frac{17}{4}$

अध्याय 9 गुणनखंड

B1DAC9

- **(ax + ay) प्रकार के व्यंजक के गुणनखंड**
- **($ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$) प्रकार के व्यंजक के गुणनखंड**

9.1 भूमिका

आपने कक्षा 6 में प्राकृतिक संख्याओं का गुणनखंड पढ़ा है। जिसमें संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडों को ज्ञात करना सीखा है। इस इकाई में हम बीजीय व्यंजकों का गुणनखंड करना सीखेंगे।

आप जानते हैं कि एक प्राकृतिक संख्या को अन्य प्राकृतिक संख्याओं के गुणनफल के रूप में कई प्रकार से लिख सकते हैं। जैसे $20 = 1 \times 20$

$20 = 2 \times 10, 4 \times 5, 2 \times 2 \times 5$

यहाँ उदाहरण के लिये एक संख्या 30 लेते हैं।

संख्या 30 को हम कई गुणनफलों के रूप में लिख सकते हैं।

$30 = 2 \times 15$

$30 = 3 \times 10$ या $30 = 5 \times 6$

इस प्रकार 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 संख्या 30 के गुणनखंड हैं इनमें से 2, 3, 5 संख्या 30 के अभाज्य गुणनखंड हैं।

ध्यान दीजिए, जब कोई संख्या अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफलों के रूप में लिखी रहती है तो यह उस संख्या का अभाज्य गुणनखंड रूप कहलाता है।

30 को अभाज्य गुणनखंड रूप में $2 \times 3 \times 5$ लिखते हैं।

इसी प्रकार 70 का अभाज्य गुणनखंड रूप $2 \times 5 \times 7$ है।

पिछले अध्याय में व्यंजकों का गुणनफल मे आपने बीजीय व्यंजकों के पद को गुणन (multiple) के रूप में लिखना सीखा है।

अब हम इस अध्याय में संख्याओं के समान बीजीय व्यंजकों को भी उनके गुणनखण्ड के रूप में व्यक्त करना सीखेंगे।

9.2 बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड

किसी संख्या या बीजीय व्यंजक के गुणनखंड वे सभी संख्याएँ या व्यंजक हैं जिनका गुणनफल उस संख्या या बीजीय व्यंजक के बराबर है।

उदाहरण के लिए बीजीय व्यंजक$7xy+5x$ में पद $7xy$गुणनखंडो 7, x और y से बना है।

अर्थात $7xy = 7 \times x \times y$

यहाँ 7xy के गुणनखंड 7,x,y अभाज्य गुणनखंड हैं। दूसरे शब्दों में अखंडनीय हैं।

नोट - बीजीय व्यंजकों में 'अभाज्य' के स्थान पर 'अखंडनीय' का प्रयोग किया जाता है।

गुणनखंड क्या है ?

जब किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखंड करते हैं तो उसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। ये गुणनखंड संख्याएँ, बीजीय चर या बीजीय व्यंजक होते हैं। कुछ बीजीय व्यंजक गुणनखंड रूप में ही होते हैं जिन्हें देख कर ही गुणनखंड स्पष्ट ज्ञात हो सकते हैं।

जैसे : $5\,x\,(y + 3)$ और $3\,(y + 2)\,(y + 3)$

अर्थात $5\,x\,(y + 3) = 5 \times x \times (y + 3)$

और $7\,(y + 2)\,(z + 5) = 7 \times (y + 2) \times (z + 9)$

यहाँ पर 5, x तथा (y+3) अखंडनीय गुणनखंड हैं तथा 5x(y+3) गुणनफलहै|

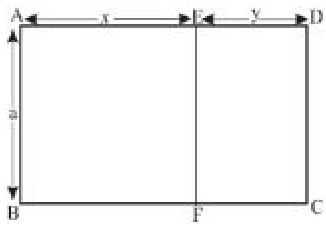
एक अन्य उदाहरण देखें $4x^2y^2$

यहाँ $4x^2y^2$ एक पदीय व्यंजक है, जिसमें 4, x, x, y तथा y गुणनखंड है, जबकि 4,x,x,y तथा y का पुनः गुणन करके पद $4x^2y^2$ गुणनफल के रूप में प्राप्त होगा|

अभी तक हमने ऐसे व्यंजकों का गुणनखण्ड करना सीखा, जिन्हें देखकर ही गुणनखण्ड स्पष्ट हो जाता है। परन्तु कई ऐसे द्विपदीय या बहुपदीय व्यंजक हैं, जिनका गुणनखण्ड

स्पष्ट नहीं हो पाता है। कई व्यंजक जैसे $5x + 5y$, $x^2 + 3x$ और$x^2 + 5x + 4$ आदि परध्यान दीजिए। इन व्यंजकों के गुणनखंड स्पष्ट नहीं है। इस प्रकार के व्यंजकों के गुणनखंड करने के लिए क्रमबद्ध विधियों का उपयोग करना होगा।

9.3 ($ax + ay$) प्रकार के व्यंजकों का गुणनखंड (जब सर्वनिष्ठ गुणनखंड दिया हो)



आकृति 9.1

आकृति 9.1 में बना आयत ABCD, जिसकी लम्बाई AD के दो भाग AE तथा ED इस प्रकार हैं कि

AE = x, तथा ED = y

इस प्रकार AD = $(x + y)$

आयत ABCD की चौड़ाईAB=a

अत: आयत ABCD का क्षेत्रफल= आयत की लम्बाई × आयत की चौड़ाई

=AD ×AB

$= (x + y) a$

$= a (x + y)$

आयत AEFB का क्षेत्रफल + आयत EDCF का क्षेत्रफल=आयत ABCD का क्षेत्रफल.............. (i)

आयत AEFB का क्षेत्रफल= AE ×AB

$= x \times a$

$= ax$

और (आयत EDCF) का क्षेत्रफल = ED× EF

$= y\times a$

$= a y$

उपर्युक्त मानों को सम्बन्ध (i) में प्रतिस्थापित करने पर $ax + ay = a(x + y)$

इस प्रकार

$ax + ay$ के गुणनखंड a और $(x + y)$ हैं।

पिछले अध्याय में हमने देखा है कि $3(a + b) = 3a + 3b$
हम उपर्युक्त की विलोम-संक्रिया के रूप में इस प्रकार समझ सकते हैं ।
$3a + 3b = 3(a + b)$
अत: व्यंजक **$3a + 3b$** का गुणनखंड रूप **$3(a + b)$**
इसी प्रकार, $7x + 7y$ का गुणनखंड रूप $7(x + y)$ है।
निम्नांकित उदाहरण को देखिए।
उदाहरण 1: $5xy + 10x$ के गुणनखंड कीजिए

दिये गये व्यंजक के दोनों पदों को अखंडनीय गुणनखंड रूप में लिख कर सर्वनिष्ठ गुणनखंड ज्ञात करेंगे

$5xy + 10x = 5 \times x \times y + 5 \times 2 \times x$
यहाँ 5x सर्वनिष्ठ गुणनखंड है
$5xy + 10x = (5x \times y) + (5x \times 2)$
दोनों पदों को बंटन नियम द्वारा संयोजित करते हैं।
$(5x \times y) + (5x \times 2) = 5x \times (y + 2)$
अत:$5xy + 10x = 5x \times (y + 2)$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि $ax + ay$ व्यंजक में दो पद ax और ay हैं। इन दोनों पदों का a उभयनिष्ठ (common) गुणनखंड हैं। इस उभयनिष्ठ गुणनखंड a को एक खंड के रूप में लेकर अन्य खंड बंटन-नियम की व्युत्क्रम संक्रिया की सहायता से लिख सकते हैं।
$ax + ay = a(x + y)$
अत: **$by + bz = b(y + z)$**
और **$cm + cn = c(m + n)$**
और da-db = d(a-b)

उदाहरण 2: $10xy + 5y$ के गुणनखंड कीजिए

$10xy = 3 \times x \times y$

$5y = 5 \times y$

दोनों पक्षों में 5y उभयनिष्ठ खंड है|

अतः $10xy + 5y = 5y \times 2x + 5y \times 1$

$= 5y(2x+1)$

नोट : यहाँ पर 1 को गुणनखंड के रूप में दर्शाने की आवश्यकता है|

उदाहरण 3: $ax + ay + az$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : चूँकि $ax + ay + az$ के तीन पदों में a सर्वनिष्ठ गुणनखंड हैं।

अतः $ax + ay + az = a(x + y + z)$

उदाहरण 4 : $27a^2b + 18ab^2$ के गुणनखंड कीजिए।

विMलेषण : दिया व्यंजव $\hat{a} = 27a^2b + 18ab^2$

इनके दोनों पदों $27a^2b$ और $18ab^2$ के उभयनिष्ठ गुणनखंड कौन-कौन हैं।

देखिए,

$27 = 9 \times 3$

$18 = 9 \times 2$

इस प्रकार 27 और 18का उभयनिष्ठ गुणनखंड 9 है।

पुन: $a^2b = a(ab)$

$ab^2 = (ab).b$

अत: दोनों पदों में उभयनिष्ठ गुणनखंड 9ab है।

हल : उपर्युक्त विश्लेषण से हम देखते हैं कि

$27a^2b + 18ab^2 = 9 \times 3 \times a(ab) + 9 \times 2 \times (ab)b$

$= 9ab(3a + 2b)$

दूसरी विधि : प्रत्येक पद को उसके अखंडनीय गुणनखंडों के गुणन के रूप में लिखने पर हम देखते है कि

$27a^2b + 18ab^2 = 3 \times 3 \times 3 \times a \times a \times b + 2 \times 3 \times 3 \times a \times b \times b$

$= 3 \times 3 \times a \times b\ (3a + 2b)$

$= 9\ ab\ (3a + 2b)$

उदाहरण 5 : $18\ x^3 + 12\ x^4 - 10\ x^2$ का गुणनखंड कीजिए

$18\ x^3 + 12\ x^4 - 10\ x^2 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x - 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x \times x$ - $2 \times 5 \times x \times x$

इन तीनों पदों में 2x ,x ,x सार्वगुणनखंड हैं

अत:$2 \times x \times x \times \{3 \times 3 \times x - 2 \times 3 \times x \times x - 5\}$

$= 2x^2\ (9x - 6x^2 - 5)$

प्रयास कीजिए :

निम्न व्यंजकों का गुणनखंड कीजिए

□ 6x + 12y □ 35pq + 14pr □ 22 y - 33z

9.3.1 व्यंजक $a(x + y) + b(x + y)$ का गुणनखंड(जब द्विपदीय व्यंजक एक समान हों)

व्यंजक $a\ (x + y) + b\ (x + y)$ में $x + y = p$ प्रतिस्थापित करने पर

$a\ (x + y) + b\ (x + y) = ap + bp$

$= p\ (a + b)$

$= (x + y)\ (a + b)$ (p का मान प्रतिस्थापित करने पर)

इस प्रकार $a\ (x + y) + b\ (x + y)$ का गुणनखंड $(x + y)\ (a + b)$ है।

अत:

$a\ (x + y) + b\ (x + y) = (x + y)\ (a + b)$

उदाहरण 6 : $x(x + 7) + 4(x + 7)$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : समीकरण को सरल करने के लिए हर्म x+7 को p मान लेते हैं तब,

$x(x + 7) + 4(x + 7) = xp + 4p$

$= p\ (x + 4)$ क्योंकि p उभयनिष्ठ गुणनखंड है

$= (x + 7)\ (x + 4)$ (पुन: p का मान रखने पर)

उदाहरण 7 : $(x - 4)^2 + 9(x - 4)$ के गुणनखंड कीजिए।

हल :$(x - 4)^2 + 9(x - 4) = p^2 + 9p$ जहा B $x - 4 = p$

$= p(p + 9)$

$= (x – 4)(x – 4 + 9)$, (p का मान रखने पर)

$= (x – 4)(x + 5)$

उपर्युक्त को निम्नलिखित ढंग से भी हल किया जा सकता है।

$(x – 4)^2 + 9(x – 4) = (x – 4)(x – 4) + 9 \times (x – 4)$

(उभयनिष्ठ गुणनखंड $(x – 4)$ को कोष्ठक के बाहर लेने पर)

$= (x – 4)\{(x – 4) + 9\}$

$= (x – 4)(x + 5)$

9.3.2 *a(x-y) + b(y-x)* का गुणनखंड (जब उभयनिष्ठ द्विपदीय व्यंजक विपरीत हो)

व्यंजक $a(x – y) + b(y – x)$ में $(x– y) = p$ प्रतिस्थापित करने पर, द्वितीय विपरीत द्विपदीय

व्यंजक $(y – x) = – p$ होगा

$a(x – y) + b(y – x) = ap + b(–p)$

$= ap – bp$

$= p(a – b)$ *(p का मान प्रतिस्थापित करने पर)*

$= (x – y)(a – b)$

उदाहरण 8: *$9(a – 3) + b(3 – a)$ के गुणनखंड कीजिये*

हल: $9(a – 3) + b(3 – a) = 9p + b(– p)$ *(जहाँ $p= a-3$)*

$= 9p – bp$

$= p(9 – b)$ *(p का मान प्रतिस्थापित करने पर)*

$= (a – 3)(9 – b)$

अभ्यास 9 (a)

1.दिये गये पदों के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड लिखिए -

(i) 7xy, 35 x2y2 (ii) 4m2, 6m2, 8m3 (iii) 3a, 21 ab

2. व्यंजक 7pq + 8qr + 3qs का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड होगा -

(i) q (ii) r

(iii) p + q + r (iv) 3s

3. व्यंजक b (6a – b) + 2c (6a – b) के पदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड होगा -

(i) b (ii) 2c (iii) (6a – b) (iv) a – b

4. निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए -

(i) 5x2 – 25xy (ii) 9a2 – 6ax (iii) 36a2b – 60 a2bc

(iv) 6P + 8P2 – 4P3 (v) 3a2bc + 6ab2c + 9abc2

5. निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए -

(i) x (x – 2) + 3 (x – 2) (ii) 7 (a – 4) + 7 (4 – a)

(iii) 2y (y + 5) – 3(y + 5) (iv) (d –7)2 + 7 (d –7)

(v) a (a – 5) + 9 (5 – a) (vi) (z – 2)2 – 3 (z – 2)

(vii) 17 (a + 3) + 17 (3 – a)

9.4. $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ के प्रकार के व्यंजकों का गुणनखंड (समूह बनाकर)

उपर्युक्त व्यंजक में चार पद हैं। इन चार पदों में कोई एक गुणनखंड सर्वनिष्ठ नहीं है। परन्तु प्रथम दो पदों ax^2+ay^2 में a उभयनिष्ठ है और अन्तिम दो पदों $bx^2 + by^2$ में b उभयनिष्ठ हैं।

इस प्रकार $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 = a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2)$

$= (x^2 + y^2)\,(a + b)$

इसे हम एक अन्य प्रकार से भी देख सकते हैं। हम इसे ax^2+bx^2 तथा ay^2+by^2 के समूह में बना लें। प्रथम समूह मेंx^2 उभयनिष्ठ है तथा द्वितीय समूह में y^2 उभयनिष्ठ है।

$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 = ax^2 + bx^2 + ay^2 + by^2$

$= x^2\,(a + b) + y^2\,(a + b)$

$= (a + b)\,(x^2 + y^2)$ (पुन: $(a + b)$ को उभयनिष्ठ लेते हैं।)

व्यंजक $5xy + 5y + 3x + 3$ पर विचार कीजिए। आप देखेंगे कि सभी पदों में कोई सार्व गुणनखंड नहीं है परन्तु पहले दो पदों में 5 और Y सार्वगुणनखंड है और अन्तिम दो पदों में सार्वगुणनखंड 3 है।

अब इन पदों को गुणनखंड रूप में लिखते हैं।

$5xy + 5y = 5 \times x \times y + 5 \times y \times 1$

$= 5 \times y \times (x + 1)$

$= 5y\ (x + 1)$

इसी प्रकार $3x + 3 = 3 \times x + 3 \times 1$

$= 3 \times (x + 1) = 3\ (x + 1)$

नोट :ध्यान दीजिए यहाँ1 को गुणनखंड के रूप में दर्शाने कीआवश्यकता है।

दोनों पदों को एक साथ लिखने पर

$5xy + 5y + 3x + 3 = 5y\ (x + 1) + 3(x + 1)$

यहाँ दायाँ पक्ष के दोनों पदों में एक सार्वगुणनखंड $(x + 1)$ हैं।

अत: $5xy + 5y + 3x + 3 = 5y\ (x + 1) + 3(x + 1)$

$= (x + 1)\ (5y + 3)$

अब व्यंजक $5xy + 5y + 3x + 3$ अखंडनीय गुणनखंडों $(x + 1)\ (5y + 3)$के गुणनफल के रूप में है

उदाहरण 1 : $a^2 + bc + ab + ac$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : व्यंजक $a^2 + bc + ab + ac$ में

पहले और तीसरे पद क्रमश: a^2 और a ,b में a उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं तथा दूसरे और चौथे पदों में c उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं। अत: व्यंजक के पदों को इस प्रकार व्यवस्थित करते हैं कि प्रत्येक समूह का एक खंड उभयनिष्ठ हो। इस प्रकार

$a^2 + bc + ab + ac = a^2 + ab + bc + ac$

$= a(a + b) + c(b + a)$

$= a(a + b) + c(a + b)$ ... [चूँकि $a + b = b + a$]

$= (a + b)\ (a + c)$

उदाहरण 2 : $3x^2 - bx^2 + by^2 - 3y^2$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : $3x^2 - bx^2 + by^2 - 3y^2$ में चार पद हैं। पहले पद $3x^2$ तथा अन्तिम पद $-3y^2$ में 3 उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं तथा दूसरे पद $-bx^2$ और तीसरे पद $+by^2$ में b उभयनिष्ठ है।

इसलिए उभयनिष्ठ गुणनखंड के अनुसार समूह बनाने पर दिया व्यंजक

$= 3x^2 - 3y^2 - bx^2 + by^2$

$= 3(x^2 - y^2) - b(x^2 - y^2)$

$= (x^2 - y^2)(3 - b)$

$= (x - y)(x + y)(3 - b)$

उदाहरण 3 : $90 \times 46 + 90 \times 54$ का मान गुणनखंड की सहायता से ज्ञात कीजिए।

हल : $90 \times 46 + 90 \times 54 = 90 \times (46 + 54)$

$= 90 \times 100 = 9000$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि

चार पदीय व्यंजकों के गुणनखंड करते समय हम उन्हें दो समूहों में इस प्रकार व्यवस्थित करते हैं कि प्रत्येक समूह में एक खंड उभयनिष्ठ हो। इन समूहों के उभयनिष्ठ गुणनखंड को एक गुणनखंड के रूप में लेते हुए अन्य गुणनखंड को यथास्थान रखकर आंरिम क्रिया करते हैं।

अभ्यास9 (b)

1. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए जबकि व्यंजकों के प्रत्येक पद में एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है-

(i) $x(y - z) + 4(y - z)$ (ii) $2(5 + b) - 7(5 + b)$

(iii) $y(a^2 + x) - (a^2 + x)$ (iv) $a(a + 3) - 5(3 + a)$

2. निम्नलिखित के गुणनखंड ज्ञात कीजिए :

(i) $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ (ii) $3ax - 6xy + 8by - 4ab$

(iii) $ax^2 + cx^2 + ay^2 - by^2 - bx^2 + cy^2$

(iv) $ab^2 - (a - c)b - c$ (v) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$

3. व्यंजक $50x^2y + 10y^2x + 30xy + 6y^2$का गुणनखण्ड कीजिए। यदि $x = 1$, $y = 2$ हो तो दिये गये व्यंजक के गुणनखण्ड का मान ज्ञात करें।

4. उस समकोण त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात करें, जिसका क्षेत्रफल $\frac{b^2 + ab}{2}$ है |

दक्षता अभ्यास 9

1. निम्नांलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए जिसके प्रत्येक पद में एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है :

(i) $4a - 12$ (ii) $ac - bc + c + cb$

(iii) $36P + 45P^3$ (iv) $y^2 - 8ay$

(v) $7a + 7b$ (vi) $3a^3x - 45a^2x - 18a$

2.निम्नांलिखित को गुणनखंड की सहायता से सरल कीजिए :

(i). $\frac{3x - 15yx}{5y - 1}$

(ii). $\frac{a^2b + b^2a}{a + b}$

(iii). $\frac{6x^4 + 10x^3 + 8x^2}{2x^2}$

3. निम्नांलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :

(i) $xy(z^2 + a^2) - x^2za - y^2za$ (ii) $p^3 + p + q - 1 - p^2 - pq$

(iii) $2ab^2 - aby + 2cby - cy^2$ (vi) $x^2 + y^3 + xy(y + 1)$

4. निम्नांलिखित के मान गुणनखंड की सहायता से ज्ञात कीजिए :

(i) $23 \times 72 + 77 \times 72$ (ii) $56 \times 25 - 25 \times 39 - 25 \times 17$

(iii) $27 \times 47 + 55 \times 8 + 27 \times 53 + 45 \times 8$

5.व्यंजक $(m^2 - mn + 4m)$ में क्या जोड़े कि $(m - n)$ उभयनिष्ठ खण्ड के रूप में प्राप्त हो ?

6. रिक्त स्थान भरिए -

(i) $ut + (........) = (u + at)(..........)$

(ii) a^3 .... – ab + b^3 = (.........) (a^2 – b)

(iii) $3x^2 + 6x^2y + 9xy^2$ = (.........) ($x + 2xy + 3y^2$)

इस इकाई में हमने सीखा

1. किसी बीजीय व्यंजक को दो या दो से अधिक अखण्डनीय बीजीय व्यंजक के गुणन के रूप में लिखना ही गुणनखण्ड है।

2. निम्नलिखित प्रकार के बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड

$(ax + ay) = a(x + y)$

$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 = (x^2 + y^2)(a + b)$

3.यदि एक आयताकार क्षेत्रफल को निरूपित करने वाला बीजीय व्यंजक दिया हुआ हो तो उस आयताकार क्षेत्र की लम्बाई व चौड़ाई ज्ञात कर बीजीय व्यंजक का गुणनखंड ज्ञात कर सकते हैं।

4.चार पदीय व्यंजकों के गुणनखंड करते समय हम उन्हें दो समूहों में इस प्रकार व्यवस्थित करते हैं कि प्रत्येक समूह में एक खंड उभयनिष्ठ हो। इन समूहों के उभयनिष्ठ गुणनखंड को एक गुणनखंड के रूप में लेते हुए अन्य गुणनखंड को यथास्थान रखकर आगे की क्रिया करते हैं।

अभ्यास9 (a)

1. (i) 7xy, (ii) $2m^2$, (iii) 3a ; **2**. (i) ; **3**. (iii) ; **4**. (i)5x (x–5y), (ii) 3a (3a – 2x),

(iii) $12a^2b$ (3 –5c), (iv) 2P (3 + 4P –$2P^2$), (v) 3abc (a + 2b +3c) ; **5.** (i) (x-2)(x+3) (ii) 0

(iii) (y+5)(2y-3) (iv) d(d - 7) (v) (a - 5) (a - 9), (vi) (z - 2) (z - 5) (vii) 102

अभ्यास 9 (b)

1. (i) (y - z) (x + 4), (ii) -5 (5 +b), (iii) (a^2 +x) (y - 1), (iv) (a + 3) (a - 5), ; **2.** (i)(x^2 + 5) (x +2), (ii) (a - 2y) (3x - 4b), (iii) (a - b + c) ($x^2 + y^2$) , (iv) (b-1) (ab +c) (v) (pq - r2) (p -1), ; **3.** 2y (5x + y) (5x + 3), 224 ; 4. b (a + b)

दक्षता अभ्यास 9

1. (i) 4 (a - 3), (ii) c (a + 1), (iii) 9 p (4 + $5p^2$), (iv) y (y - 8a), (v) 7 (a + b), (vi) $3a(a^2x - 15ax - 6)$; **2.** (i) - 3x, (ii) ab, (iii) $3x^2 + 5x + 4$; **3.** (i) (yz - xa) (zx - ay), (ii) (p - 1) (p^2 - q + 1), (iii) (2b - y) (ab + cy), (iv) (x + y) (x + y^2) ; **4.** (i) 7200, (ii) 0, (iii) 3500, **5.** - 4n; **6.** (i) at^2, t (ii) – a^2 b^2, (a - b^2) (iii) 3 x

इकाई : 10 चतुर्भुज

B1H6DH

- चतुर्भुज एवं इसके विभिन्न अंग
- चतुर्भुज के प्रकार
- निम्नलिखित प्रगुणों का प्रायोगिक सत्यापन :
    - चतुर्भुज के सभी अन्त: कोणों का योगफल 360° होता है
    - समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं
    - समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं
    - समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे का समद्विभाग करते हैं
    - आयत के विकर्ण समान होते हैं तथा परस्पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं
    - समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं
    - वर्ग के विकर्ण समान होते हैं तथा परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं

10.1 भूमिका :

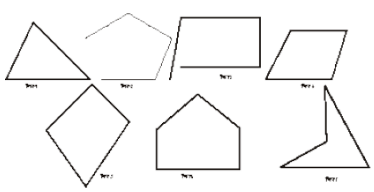
आप दैनिक जीवन में, अपने परिवेश से विभिन्न आकारों की अनेक ऐसी वस्तुएँ देखते हैं, जिनके तल चार भुजाओं से घिरे हैं, जैसे - पुस्तकें, दरवाजे, कमरे की छत, दीवारें इत्यादि । इन सभी वस्तुओं के तल चार भुजाओं से घिरे (आयत या वर्ग) होते हैं ।

आप कक्षा 6 में पढ़ चुके हैं किरेखाखण्डों द्वारा बनी सरल बन्द आकृति को बहुभुज कहते हैं और तीनरेखाखण्डों द्वारा बने बहुभुज को त्रिभुज कहते हैं। इस अध्याय में आप चार भुजाओं से घिरी आकृतियों के प्रकार एवं उनके गुणों का अध्ययन करेंगे।

इन्हें कीजिए :

4, 5,6 माचिस की तीलियों को ले कर भिन्न-भिन्न कई प्रकार के बहुभुज बनाइए। तीलियों की संख्या के आधार पर इनका नाम भी सोचिए।

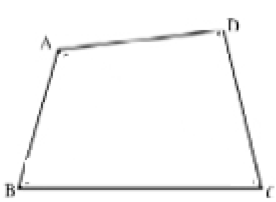
नीचे दिये चित्रों को देखकर आकृति पहचानने का प्रयास कीजिए।



चित्र-1 त्रिभुज है, चित्र 2, 3 खुली आकृतियाँ हैं। चित्र 4 और चित्र 5, 7 चाररेखाखण्डों का बहुभुज अर्थात चतुर्भुज है, चित्र-6 पाँच रेखाखण्डों से बना बहुभुज अर्थात पंचभुज है।

आप जानते हैं तीन रेखाखण्डों से बनी बन्द आकृति को त्रिभुज कहते हैं, इसी प्रकार चार रेखाखण्डों से बनी बन्द आकृति को चतुर्भुज कहते हैं।

आकृति 10.1 मेंरेखाखण्डों $\overline{AB}$, $\overline{B}$, $\overline{D}$ और से बनी आकृति को देखिए। यह चाररेखाखण्डों से बनी बन्द आकृति है, इसे हम चतुर्भुज ABCD से सम्बोधित कर सकते हैं।



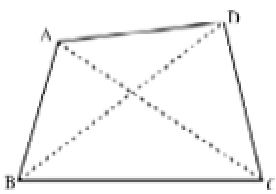
आकृति 10.1

10.2 चतुर्भुज के शीर्ष, भुजाएँ, विकर्ण, संलग्न भुजाएँ, सम्मुख भुजाएँ तथा इसके अंत: एवं बाह्य

कोण :

आकृति 10.2 को देखिए। इसकी कितनी भुजाएँ हैं ? हम देखते हैं कि AB, BC, CD तथा DA चार भुजाएँ हैं।

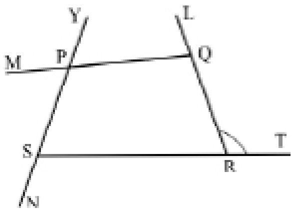
भुजा AB, AD, भुजा AC, BC, भुजा BC, CD तथा भुजा CD, DA परस्पर लगे हैं, आसन्न हैं या संलग्न हैं। इन्हें संलग्न भुजाएँ कहते हैं। जिस बिन्दु पर संलग्न भुजाएँ एक दूसरे को काटती हैं उसे शीर्ष कहते हैं। इस प्रकार चतुर्भुज ABCD में देखिए कितने शीर्ष हैं ? इसके चार शीर्ष A, B, C और D हैं।



आकृति 10.2

हम देखते हैं कि भुजा ABतथा DC परस्पर आमने सामने हैं। इन्हें सम्मुख भुजाएँ कहते हैं। इनके अतिरिक्त और कौन-कौन सी सम्मुख भुजाएँ हैं? AD तथा BC सम्मुख भुजाएँ हैं। ABCD में सम्मुख शीर्ष कौन से हैं? A का सम्मुख शीर्ष C और B का सम्मुख शीर्ष D है। सम्मुख शीर्ष A और D को मिलाने वाले रेखा खंड AC को विकर्ण कहते हैं। दूसरा विकर्ण कौन सा है ? BD दूसरा विकर्ण है।

पुन: एक चतुर्भुज PQRS लीजिए। इसके शीर्ष P पर दो संलग्न भुजाएँ SP और OP मिलती हैं। इस प्रकार बने कोण QPS को अन्त: कोण कहते हैं। इस चतुर्भुज के शेष अन्त: कोणों के नाम बताइए। $\angle$PSR, $\angle$SRQ तथा $\angle$RQP तीन और अन्त: कोण हैं। भुजा SR को T तक बढ़ाइए। इस प्रकार बने कोण QRT को चतुर्भुज का बाह्य कोण कहते हैं। इसी प्रकार भुजा RQ को L तक, भुजा QP को Mतक और भुजा PS को N तक बढ़ाकर बताइए कि चतुर्भुज के अन्य वाह्य कोण कौन से हैं? $\angle$LQP, $\angle$NSR, $\angle$MPS बाह्य कोण हैं। क्या कोण YPM बाह्य कोण है ? नहीं।

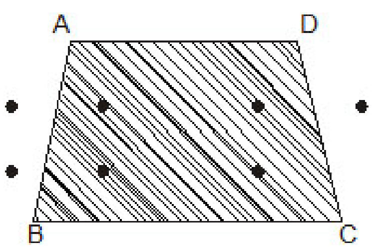


आकृति 10.3

प्रयास कीजिए :

चतुर्भुज ABCD, PQRS तथा LMNO को खींच कर निम्नलिखित सारिणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

अंगों के नाम\ चतुर्भुज → ↓	ABCD	PQRS	LMNO
शीर्ष			
भुजाएँ			
संलग्न भुजाएँ			LM,MN,NO,OL; MN,NO;OL,LM
सम्मुख भुजाएँ	AB और DC AD औरBC		
विकर्ण			
अन्त:कोण		<P और <R	
सम्मुख कोण	<A और <C		



आकृति 10.4

आकृति 10.4 में ∠D और ∠C को देखिए। इन दोनों कोणों में एक भुजा DC उभयनिष्ठ है। चतुर्भुज के अन्य कोणों को बताइए जिनमें एक भुजा उभयनिष्ठ हो। ∠A और ∠D में भुजा AD, ∠A और ∠B में भुजा AB तथा ∠B और ∠C में भुजा BC उभयनिष्ठ है। ऐसे कोण युग्म को जिनमें एक भुजा उभयनिष्ठ हो संलग्न या आसन्न कोण कहते हैं।

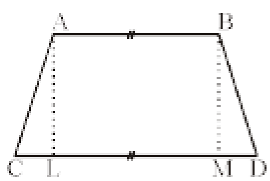
ऐसे कोणों को बताइए जो संलग्न या आसन्न कोण न हों? कोण B और कोण D तथा कोण A और कोण C एक दूसरे के आमने-सामने हैं। ऐसे कोणों को सम्मुख कोण कहते हैं।

चतुर्भुज ABCD के अन्त: रेखांकित भाग को **अन्त: भाग (Interior)** तथा उसके बाहर के भाग को **बहिर्भाग (Exterior)** कहते हैं।

एक चतुर्भुज की भुजाओं व कोणों की प्रकृति के आधार पर उसे विशेष नाम दिया जाता है।

10.3 चतुर्भुज के विशिष्ट प्रकार :

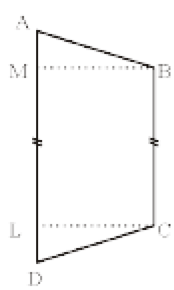
1. समलम्ब आकृति 10.5 ABCD को देखिए। इसकी सम्मुख भुजाए B AB तथा CD परस्पर समांतर हैं। बिन्दु A और B से भुजा DC पर लम्ब डालिए और इनकी लम्बाइयाँ नाप कर बताइए।



आकृति 10.5

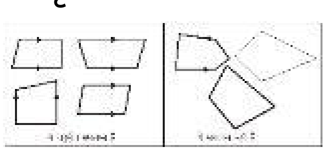
हम देखते हैं कि दोनों लम्बाइयाँ बराबर हैं अर्थात् AL= BM।

ऐसे चतुर्भुज को जिसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर हो, समलम्ब कहते हैं।



आकृति 10.6

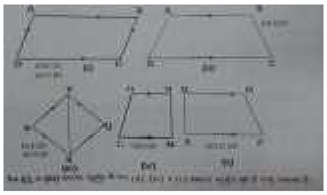
आकृति 10.6 को देखिए। यह वैसा चतुर्भुज है ? यह भी समलम्ब है।



आकृति 10.7

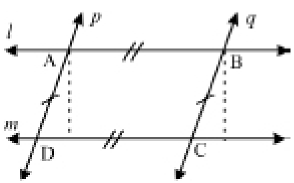
2. समांतर चतुर्भुज

समांतर चतुर्भुज भी एक चतुर्भुज ही है। जैसा कि इसके नाम से संकेत होता है कि इसका सम्बन्ध समांतर रेखाओं से है। समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समान्तर होते हैं



आकृति 10.8

दो समांतर रेखाए l और m खींचिए। इसी प्रकार दो और समांतर रेखाएP और q खींचिए जो पूर्व समांतर रेखाओं को A, D तथा C, B पर काटती है। प्रतिच्छेद बिन्दु A और B से रेखा स् पर लम्ब डालिए और इनकी दूरी मापिए। ये दोनों दूरिया भी समान हैं अर्थात् AB || BC इसी प्रकार AD || BC । ऐसे चतुर्भुज को जिसकी सम्मुख भुजाए समांतर हों, समांतर चतुर्भुज कहते हैं।



आकृति 10.9

प्रयास कीजिए :

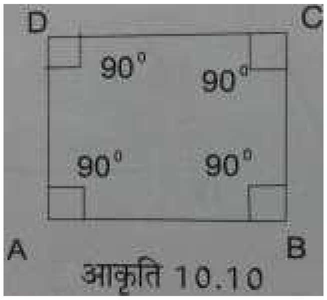
एक 30° – 60° –90° कोणों वाले दो समान सेट स्क्वेयर लीजिए, अब इन्हें आपस में इस प्रकार मिला कर रखिए कि जिससे एक समांतर चतुर्भुज बन जाए, विचार कीजिए कि यह समांतर चतुर्भुज के गुण की पुष्टि करता है।

3. आयत

- आयत एक समांतर चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समान होते हैं।

इसे कीजिए

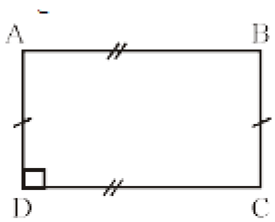
एक आयत की आकृति बनाइए और प्रत्येक कोण को चाँदा की सहायता मापिए



आकृति 10.10

प्रयास कीजिए :

आकृति 10.11 में AB || DC और AD || BC, ∠ADC=90°, शेष कोणों को नाप कर इनका मान बताइए। ∠Aृ∠Bृ∠Cृ900 भुजा AB और DC तथा भुजा AD औरBC को नापकर देखिए। भुजा AB =CD और भुजा AD =BC ।



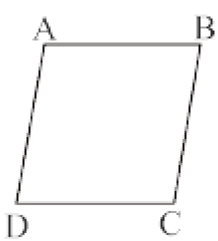
आकृति 10.11

ऐसे चतुर्भुज ABCD को जिसका प्रत्येक कोण90° और सम्मुख भुजाएँ बराबर हों, आयत कहते हैं।

आयत एक ऐसा समान्तर चतुर्भुज है जिसका प्रत्येक कोण समकोण होता है।

4. समचतुर्भुज

आकृति 10.12 में AB || DC और AD || BC है। संलग्न भुजाओं को मापिए। संलग्न भुजाएँ AB =AD; AD =DC; DC= CB तथा CB =BA ।



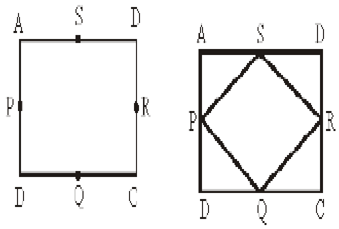
आकृति 10.12

ऐसे चतुर्भुज को समचतुर्भुज कहते हैं।

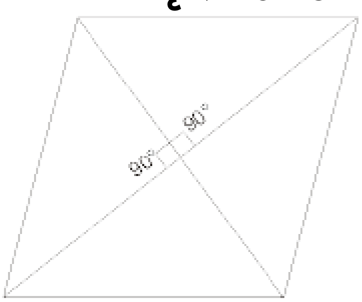
सम चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर लम्बाई की होती हैं। चूँकि सम चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं, इसलिए यह एक समांतर चतुर्भुज भी है। अतः एक सम चतुर्भुज में एक समांतर चतुर्भुज के सभी गुण विद्यमान हैं I

इसे कीजिए

एक आयताकार कागज लीजिए। आकृति 10.13 (i) में ABCD एक आयताकार कागज है, इसकी भुजा AB को इस प्रकार मोड़िए कि बिन्दु A बिन्दु B पर पड़े और कागज को दबा दीजिए तो क्रीज बन जायेगी। AB पर क्रीज का बिन्दु P भुजा AB का मध्य बिन्दु है। इसी प्रकार BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दु Q, R तथा Sज्ञात कीजिए। अब कागज को रेखाखंड PQ के अनुगत मोड़ दीजिए। इसी प्रकार कागज को $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ तथा $\overline{SP}$ के अनुगत मोड़ दीजिए। एक चतुर्भुज PQRSप्राप्त होगा। चतुर्भुज PQRS एक सम चतुर्भुज है।



आकृति 10.13



आकृति 10.14

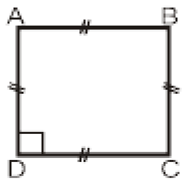
सम चतुर्भुज PQRS के सम्मुख शीर्ष P, R तथा S, Qको जोड़ने पर विकर्ण PR तथा SQ प्राप्त होते हैं जो कि बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। बिन्दु O पर बने कोणों का नापिए। जाँच कीजिए

$\angle POQ = \angle POS = 90°$

5. वर्ग :

आकृति 10.15 चतुर्भुज ABCD में AB || DC और AD || BC तथा प्रत्येक कोण समकोण है। चारों भुजाओं को नापिए और इनका मान बताइए। भुजा AB =BC =CD =AD

ऐसे चतुर्भुज को जिसका प्रत्येक कोण समकोण और सभी भुजाएँ बराबर हों वर्ग कहते हैं।



आकृति 10.15

वर्ग एक आयत होता है जिसकी भुजाएँ बराबर होती हैं। अर्थात एक वर्ग में आयत के सभी गुण होने के साथ एक अतिरिक्त गुण भी होता है, वर्ग की चारों भुजाएँ बराबर लम्बाई की होती हैं। वर्गएक समचतुर्भुज

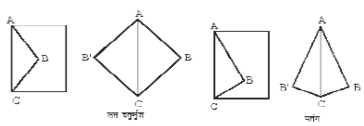
भी है।

6. पतंग(Kite) :

एक मोटे कागज की सीट लीजिए। इसे दोहरा कर मोड़ लीजिए। चित्रानुसार समान लम्बाई के दो रेखाखंड AB= BC खींचिए। अब ABC के अनुदिश काटकर खोलिए प्राप्त आकृति एक समचतुर्भुज है।

यदि आप AB > BC लम्बाई के रेखाखंड खींचते तो प्राप्त आकृति एक पतंग होती

पतंग एक चतुर्भुज है जिसमें दो आसन्न भुजाओं के युग्म बराबर होते हैं।

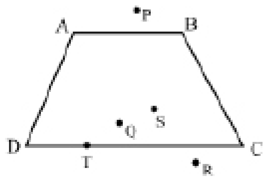


आकृति 10.16

प्रयास कीजिए :

अभ्यास 10(a)

1. आकृति 10.17 चतुर्भुज A BCD में



आकृति 10.17

(a) कितनी भुजाएँ हैं ?

(b) कितने अन्त: कोण हैं ?

(c) सम्मुख कोणों के कितने युग्म है ?

(d) संलग्न भुजाओं के कितने जोड़े हैं ?

(e) कितने विकर्ण होंगे ?

(f) क्या AB, BC, CD और DA में से कोई विकर्ण हैं ?

(g) कितने शीर्ष हैं ?

2. उपर्युक्त आकृति 10.17 के आधार पर अपनी अभ्यास पुस्तिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(a) Q........... क्षेत्र में स्थित है।

(b) R .... क्षेत्र में स्थित है।

(c) T .... स्थित है।

3. किसी चतुर्भुज ABCD से सम्बन्धित निम्नलिखित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(a) दो .... शीर्षों को मिलाने से विकर्ण बनता है।

(b) शीर्ष A और .... को मिलाने से विकर्ण बनता है।

(c) शीर्ष D और .... को मिलाने से विकर्ण बनता है।

(d) चतुर्भुज का एक विकर्ण इसे .... त्रिभुजों में विभाजित करता है।

4. अपनी अभ्यास पुस्तिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(a) सम चतुर्भुज की चारों भुजाएँ .... होती हैं।

(b) आयत के .... कोण समकोण होते हैं।

(c) वर्ग की .... भुजाएँ बराबर और .... कोण समकोण होते हैं।

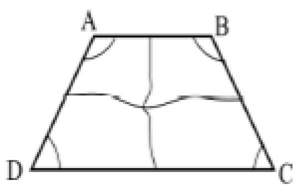
(d) समलम्ब चतुर्भुज की .... भुजाओं का एक युग्म समान्तर होता है।

10.4. चतुर्भुज के प्रगुणों का प्रयोगिक सत्यापन :

10.4.1 चतुर्भुज के अन्त: कोणों का योगफल :

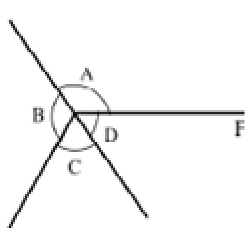
क्रियाकलाप :

1.एक मोटे कागज पर एक चतुर्भुज ABCD बनाइए। इसके चार टुकड़े इस प्रकार कीजिए कि प्रत्येक टुकड़े में अलग-अलग कोण A, B, Cतथा D आ जाएँ। अब एक किरण OP खींचिए। बिन्दु O पर चारों कोणों को क्रम से व्यवस्थित कीजिए। अब हम देखते हैं कि चतुर्भुज के चारों अन्त: कोण ∠A, ∠B, ∠C और ∠D को बिन्दु O पर क्रम से रखने पर ∠D की कोर OP पर पुन: आ जाती है। किसी बिन्दु पर कितने अंश का कोण बनता है? हम जानते हैं कि किसी बिन्दु पर एक सम्पूर्ण कोण (360°) बनता है। अत: चतुर्भुज के चारों अन्त: कोणों अर्थात् ∠A, ∠B, ∠C और ∠D का योगफल 360° है।



आकृति 10.18

2.अब आप अपनी अभ्यास पुस्तिका पर अलग-अलग प्रकार के तीन चतुर्भुज खींचिए और प्रत्येक का नामांकन ABCD कीजिए। प्रत्येक चतुर्भुज के कोणों को नापिए और निम्नांकित तालिका में इनके मापों को अंकित कीजिए।



आकृति 10.19

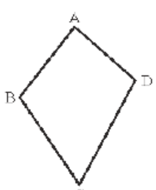
चतुर्भुज की क्रम संख्या	<A	<B	<C	<D	S=<A+<B+<C+<D	360°-S
1						
2						
3						

अब हम देखते हैं कि 360° –S का मान शून्य होगा अथवा इतना छोटा है कि इसे छोड़ा जा सकता है। अर्थात् $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360$

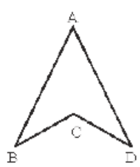
चतुर्भुज के अन्तः कोणों का योग 360° होता है।

उपर्युक्त क्रिया कलाप द्वारा निष्कर्ष निकला है कि चतुर्भुज के अन्तः कोणों का योग 360° होता है। और प्रत्येक अन्तः कोण 180° से छोटा होता है। ऐसे चतुर्भुज को उत्तल चतुर्भुज कहते हैं। यदि किसी चतुर्भुज का कोई अन्तः कोण 180° से बड़ा होता है। उसे अवतल चतुर्भुज कहते हैं।

ध्यान दें -ज्यामिति में हम केवल उत्तल चतुर्भुज का अध्ययन करते हैं।



उत्तल चतुर्भुज



अवतल चतुर्भुज

आकृति 10.20

अभ्यास 10(b)

1. किसी चतुर्भुज का एक कोण 60°° तथा शेष तीन अन्त: कोण बराबर हैं। शेष प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए।

2. किसी चतुर्भुज के दो कोण 60° और 120° के हैं। शेष दो कोण समान हैं। शेष प्रत्येक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

3. किसी चतुर्भुज के अन्त: कोण बराबर हैं। प्रत्येक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि किसी चतुर्भुज के दो अन्त: कोण सम्पूरक हैं, तो शेष दो कोणों का योग ज्ञात कीजिए।

5. एक 45° के $\angle BAC$ की रचना कीजिए। इसके अन्त: क्षेत्र में एक बिन्दु P से रेखा खंड BA और AC पर लम्ब PN और PM खींचिए। $\angle NPM$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि चतुर्भुज के अन्त: कोणों का अनुपात 3 : 4 : 5 : 6 हो,तो प्रत्येक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि चतुर्भुज के तीन बाह्य कोण क्रमश: 80°, 100° और 120° हो, तो चौथे अन्त: कोण का मान ज्ञात कीजिए।

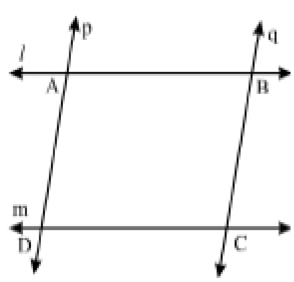
8. यदि चतुर्भुज के अन्त: कोण A, B, C और D इस प्रकार हों कि इनके अनुपात $\angle A : \angle B = 1 : 2$, $\angle B : \angle C = 2 : 3$, $\angle C : \angle D = 3 : 4$, तो प्रत्येक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

9. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का शीर्ष कोण 400 है। त्रिभुज की भुजा AB और AC के मध्य बिन्दु क्रमश: M और N है। बिन्दुओं M और N को मिलाइए। इस प्रकार बने चतुर्भुज BMNC के अन्त: कोण BMN तथा कोण CNM का योग ज्ञात कीजिए। इनका अलग-अलग मान भी ज्ञात कीजिए।

10.4.2 समांतर चतुर्भुज के सम्मुख भुजाएँ -

क्रियाकलाप :

समांतर रेखाओं का एक जोड़ा l और m खींचिए। इन रेखाओं को प्रतिच्छेद करते हुए समांतर रेखाओं का जोड़ा p और q खींचिए। इन प्रतिच्छेद बिन्दुओं को ABCD से नामांकित कीजिए।



आकृति 10.21

इसी प्रकार के दो समांतर चतुर्भुज अपनी अभ्यास पुस्तिका पर खींचिए। तीनों चतुर्भुजों का नाम ABCD लिखिए। अब भुजा AB, BC, CD तथा DA को मापिए और निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

क्रम संख्या	सम्मुख भुजाओं AB और DC का जोड़ा			सम्मुख भुजाओं BC और AD का जोड़ा		
	AB	DC	AB-DC	BC	AD	BC-AD
1						
2						
3						

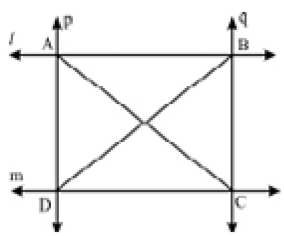
तालिका से हम देखते हैं कि AB - DC तथा BC - AD शून्य है अथवा इसका अन्तर इतना छोटा है कि इसके मान को छोड़ा जा सकता है अर्थात् प्रत्येक स्थिति में AB= DC तथा BC= AD अत: हम देखते हैं कि

समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

10.4.3 समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण:

क्रियाकलाप :

समांतर रेखाओं का एक जोड़ा l और m खींचिए। इन रेखाओं का प्रतिच्छेद करते हुए समांतर रेखाओं का जोड़ा p और q खींचिए। इस प्रकार बने चतुर्भुज को ABCD से नामांकित कीजिए ।



आकृति 10.22

विभिन्न नाप के दो ABCD समांतर चतुर्भुज बनाइए। अब तीनों चतुर्भुजों के अन्त: कोणों को मापिए और निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

क्रम संख्या	सम्मुख कोणों A और C का जोड़ा			सम्मुख कोणों B और D का जोड़ा		
	∠A	∠C	∠A-∠C	∠B	∠D	∠B-∠D
1.						
2.						
3.						

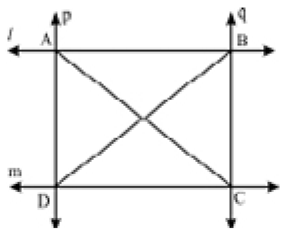
तालिका से हम देखते हैं कि ∠A - ∠C तथा ∠B - ∠D शून्य है अथवा इनका अन्तर इतना छोटा है कि इनके मान को छोड़ा जा सकता है अर्थात् ∠A= ∠C तथा ∠B= ∠D

अत: हम देखते हैं कि

समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं।

10.4.4 समांतर चतुर्भुज के विकर्ण

समांतर रेखाओं का एक जोड़ा l और m खींचिए। इन रेखाओं का प्रतिच्छेदन करते हुए समांतर रेखाओं का एक और जोड़ा p और q खींचिए। इस प्रकार बने समांतर चतुर्भुज को ABCD से नामांकित कीजिए। शीर्ष A, C तथा B, D को मिलाइए। विकर्ण AC और BD एक दूसरे का बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करते हैं। इसी प्रकार दो और समांतर चतुर्भुज बनाइए। इनके नाम भी ABCD रखिए। इनके विकर्ण AC और BD का भी प्रतिच्छेदन बिन्दु O मानिए।



आकृति 10.23

अब AO और OC तथा DO और OB को माप कर निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

क्रम संख्या	विकर्ण AC			दूसरा विकर्ण BD		
	AO	OC	AO-OC	DO	OB	DO-OB
1.						
2.						
3.						

हम देखते हैं कि AO - OC तथा DO - OB शून्य है अथवा इनका अन्तर इतना छोटा है कि इसे छोड़ा जा सकता है अर्थात् AO= OC तथा DO= OB । अत:

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अभ्यास 10(c)

1. समांतर चतुर्भुज का एक अन्त: कोण 30° है। शेष कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

2. समांतर चतुर्भुज की किसी भुजा पर बने कोणों में 40° का अन्तर है। प्रत्येक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

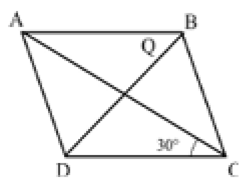
3. यदि समांतर चतुर्भुज की किसी भुजा पर बने कोणों में 1 और 3 का अनुपात हो,तो प्रत्येक कोण ज्ञात कीजिए।

4. समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ 4 सेमी और 6 सेमी हैं। चतुर्भुज की अन्य दो भुजाओं की माप बताइए।

5. समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ 8 सेमी और 6 सेमी हैं। चतुर्भुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।

6. समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं का अनुपात 1 : 2 है। यदि इसका परिमाप 30 सेमी हो, तो प्रत्येक भुजा की माप ज्ञात कीजिए।

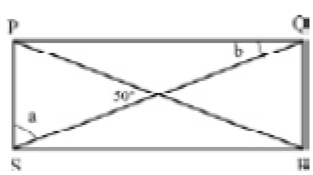
7. आकृति 10.24 ABCD एक समचतुर्भुज है। कोण Q का मान ज्ञात कीजिए। कोण ADC भी ज्ञात कीजिए।



.

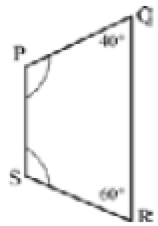
आकृति 10.24

8. आकृति 10.25 PQRS एक आयत है। कोण a और b के मान ज्ञात कीजिए। रेखाखंड PR और QS को माप कर सत्यापित कीजिए कि दोनों बराबर हैं।



आकृति 10.25

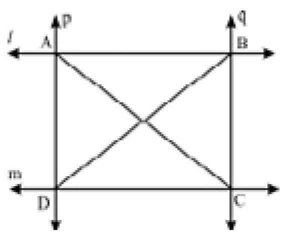
9. आकृति 10.26 समलम्ब PQRS में कोण P और S के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.26

10.4.5 आयत के विकर्ण :

समांतर रेखाओं का एक जोड़ा l और m खींचिए। इसी प्रकार समांतर रेखाओं p और q का जोड़ा खींचिए जो पूर्व रेखाओं पर लम्ब है। इस प्रकार बने आयत को ABCD से नामांकित कीजिए। ऐसे ही दो और आयतों की रचना कीजिए। इनको भी ABCD से नामांकित कीजिए। अब विकर्ण AC और BD को मापिए और इनके मान को निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।



आकृति 10.27

क्रम संख्या	विकर्ण की लम्बाइयाँ		
1	AC	BD	AC-BD
2			
3			

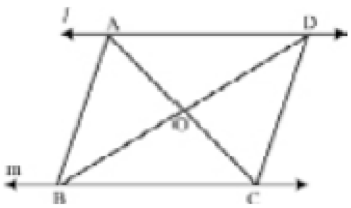
हम देखते हैं कि विकर्णों की लम्बाइयों के माप का अन्तर AC - BD शून्य है अथवा इतना छोटा है कि इसके मान को छोड़ा जा सकता है अर्थात् AC= BD अत:

आयत के विकर्ण समान होते हैं। ध्यान दें कि आयत एक विशेष प्रकार का समान्तर चतुर्भुज है इसलिए इसके विकर्ण भी एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

10.4.6 समचतुर्भुज के विकर्ण

समांतर रेखाओं का एक जोड़ा l और m खींचिए। किसी रेखा पर एक बिन्दु A लीजिए। A को केन्द्र मानकर ऐसी दूरी की त्रिज्या लेकर चाप लगाइए कि यह दोनों रेखाओं को काटे।

मान लीजिए कि कटान बिन्दु क्रमश: D और B हैं। बिन्दु A को बिन्दु B से मिलाइए, और बिन्दु D से AB के समान्तर DC रेखा खींचिए। आकृति ABCD एक समचतुर्भुज है जिसकी चारों भुजाएँ समान हैं। AC और BD विकर्ण हैं। मान लीजिए कि ये बिन्दुO पर प्रतिच्छेद करते हैं। इसी प्रकार दो और समचतुर्भुजों की रचना कीजिए। इन्हें ABCD से नामांकित कीजिए।



अब समचतुर्भुज में कोण ∠AOB और ∠COB को नापिए और निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

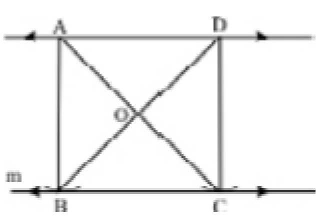
समचतुर्भुज की क्रम संख्या	<AOB	90° -<AOB	<COB	90° -<COB
1				
2				
3				

हम देखते हैं कि90°– ∠AOB और90°– ∠COB का मान शून्य है अथवा इतना छोटा है कि इसके मान को छोड़ा जा सकता है अर्थात्90°= ∠AOBतथा90° =∠COB या ∠AOB =∠COB =90°

समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

10.4.7 वर्ग के विकर्ण :

एक वर्ग ABCD की रचना कीजिए। इनके विकर्ण AC व BD एक दूसरे कोO पर प्रतिच्छेद करते हैं।



ऐसे ही दो और वर्गों की रचना कीजिए। इनको भी ABCD से नामांकित कीजिए। विकर्ण AC और BD को मापिए और निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

वर्ग की क्रम संख्या	AC	BD	AC-BD
1			
2			
3			

हम देखते हैं कि AC - BD शून्य है अथवा इतना छोटा है कि इसका मान छोड़ा जा सकता है अर्थात् AC= BD

अत:वर्ग के विकर्ण समान होते हैं।

पुन: उपर्युक्त तीनों वर्गों में ∠AOB और ∠COB को नापिए और निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

समचतुर्भुज की क्रम संख्या	<AOB	90°-<AOB	<COB	90°-<COB
1				
2				
3				

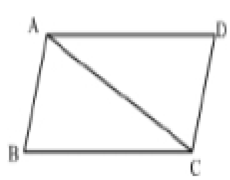
हम देखते हैं कि90° – ∠AOB और90° – ∠COB का मान शून्य है अथवा इतना छोटा है कि इसके मान को छोड़ा जा सकता है अर्थात् 90°= ∠AOBऔर90°= ∠COB या ∠AOB =∠COB =90°

अत:

वर्ग के विकर्ण समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

अभ्यास 10(d)

1. आकृति 10.30 ABCD एक समान्तर चतुर्भुज का है। वे प्रतिबन्ध बताइए जब कि यह



(i) समचतुर्भुज होगा,

(ii) आयत होगा (iii) वर्ग होगा।

2. समांतर चतुर्भुज ABCD में निम्नांकित प्रत्येक कथन के सत्य होने पर आकृति को किस नाम से पुकारेंगे ?

(i) AB= BC

(ii) $\angle ABC=90°$

(iii) $\angle ABC=90°$ और AB= BC

3. वर्ग में

(i) भुजाओं की लम्बाइयाँ .... होती हैं।

(ii) विकर्ण .... होते हैं।

(iii) प्रत्येक कोण .... होता है।

(iv) विकर्ण एक दूसरे के .... होती हैं।

4. यदि किसी वर्ग के विकर्ण का वर्ग 50 वर्ग सेमी है, तो इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

5. आप की पुस्तक के एक पन्ने का एक विकर्ण दूसरे विकर्ण से छोटा है। क्या यह पुस्तक आयताकार है ?

6 एक आयत बनाइए जिसकी संलग्न भुजाएँ क्रमश: 6 सेमी और 8 सेमी है। इनके विकर्णों को मापिए और पाइथागोरस प्रमेय से माप का सत्यापन कीजिए।

7. एक आयत बनाइए जिसकी संलग्न भुजाएँ क्रमश: 5 सेमी और 12 सेमी हैं। इनके विकर्णों को मापिए और पाइथागोरस प्रमेय से इसका सत्यापन कीजिए।

8. समचतुर्भुज का एक विकर्ण यदि उसकी एक भुजा के बराबर हो, तो इनके सभी अन्त:कोणों का मान ज्ञात कीजिए।

इस इकाई में हमने सीखा :

1. चतुर्भुज के शीर्ष, भुजाएँ, विकर्ण, संलग्न भुजाएँ, सम्मुख भुजाएँ तथा इसके अन्त: एवं वाह्य कोण ।

2. चतुर्भुज के विशिष्ट प्रकार-समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत तथा वर्ग ।

3. चतुर्भुज के निम्नांकित प्रगुणों का प्रायोगिक सत्यापन :

(i) चतुर्भुज के सभी अन्त: कोणों का योगफल 360° होता है ।

(ii) समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजायें समान होती हैं ।

(iii) समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं ।

(iv) समांतरचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है ।

(v) आयत के विकर्ण समान होते हैं तथा परस्पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ।

(vi) समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं ।

(vii) वर्ग के विकर्ण समान होते हैं तथा परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं ।

उत्तरमाला

अभ्यास 10 (a)

1. (क) चार, (b) चार, (c) दो, (d) चार जोड़े, (e) दो, (f) नहीं, (g) चार; 2. (a) अन्तः; (b) वाह्य, (c) भुजा DC पर, 3. (a) सम्मुख, (b) C (c) B, (d) दो;4. (क) बराबर, (b) लम्बवत् तथा असमान लम्बाई के, (c) बराबर, (d) चारों, (e) चारों,चारों; (f) सम्मुख, (g) सम्मुख

अभ्यास 10 (b)

1. 100°, 100°, 100°; 2.90°,90°; 3.90°,90°,90°,90°; 4. 180°; 5. 135°; 6. 60°, 80°, 100°, 120°; 7. 120°; 8. 36°, 72°, 108°, 144°;9. 220°, 110°, 110°

अभ्यास 10 (c)

1. 150°, 30°, 150°; 2. 110°, 70°, 110°, 70°; 3. 135°, 45°, 135°, 45°°; 4. 4 सेमी,

6 सेमी 5. 28 सेमी; 6. 5 सेमी, 10 सेमी, 5 सेमी; 10 सेमी; 7. 60°, 120°; 8. a= 60°, b= 120°;

9. ∠P= 140°, ∠ Q= 120°

अभ्यास 10 (d)

1. (i) संलग्न भुजा बराबर, (ii) एक कोण900, (iii) एक कोण90° और संलग्न भुजाएँ बराबर, 2. (i) समचतुर्भुज, (ii) आयत, (iii)वर्ग; 3. (i) बराबर, (ii) बराबर, (iii)

समकोण (iv) बराबर; 4. 20 सेमी; 5. नहीं; 6. 10 सेमी ; 7. 13 सेमी; 8. 60°, 120°, 60°, 120°

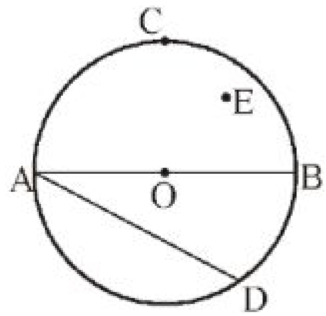
इकाई : 11 वृत

- **वृत के निम्नलिखित प्रगुणों का प्रायोगिक सत्यापन :**
- **अर्धवृत का कोण समकोण होता है**
- **चाप के सम्मुख केन्द्र पर बना कोण, उसी चाप द्वारा शेषवृत के किसी बिन्दु पर बने कोण का दूना होता है**
- **एक ही वृतखंड के कोण बराबर होते हैं**

भूमिका : पिछली कक्षा में हम वृत की अवधारणा से परिचित हो चुके हैं । इसके साथ ही हमने वृत से संबंधित कई पारिभाषिक शब्दों जैसे केन्द्र, त्रिज्या, व्यास, जीवा, चाप, अद्र्धवृत,त्रिज्यखंड और वृतखंड के बारे में भी जानकारी प्राप्त कर ली है जिसकी पुनरावृति हम निम्न उदाहरण के द्वारा कर सकते हैं ।

इन्हें कीजिए :

एक3.0 सेमी का वृत Oकेन्द्र ले कर खींचिए। वृत की त्रिज्या OA को वृत के किसी बिन्दु B तक बढ़ाइए। वृत के बिन्दु A से AD जीवा खींचिए। अब निम्न बिन्दुओं पर विचार कीजिए।



उपर्युक्त चित्र में आपने देखा है कि

ABवृत का व्यास है। आप जानते हैं कि व्यास त्रिज्या का दो गुना होता है। चित्र में वृत की त्रिज्या OA, 3.00 सेमी दी गई है। AB =2.0A अत: व्यास ABका नाप 6.00 सेमी होगा। वृत की सबसे बड़ी जीवा वृत का व्यास होती है, व्यास वृत को दो समान भागों में विभक्त करता है और प्रत्येक भाग अर्धवृत कहलाता है। वक्र BCA तथा ADBअर्धवृत हैं और वृत के किसी भाग को चाप कहते हैं। चित्र में वक्रBC एक चाप है।

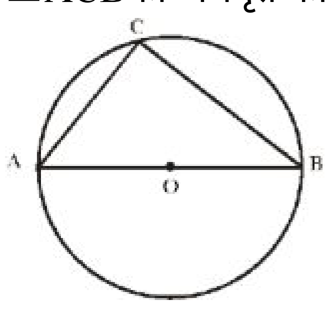
अब इस कक्षा में हम वृत के चाप या जीवा द्वारा वृत के केन्द्र और उसके बिन्दुओं पर बनने वाले कोणों तथा इनके परस्पर सम्बन्धों के बारे में इस इकाई के अन्तर्गत अध्ययन करेंगे ।

11.1 अर्धवृत का कोण :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्रानुसार एक वृत खींचिए जिसका केन्द्र O है। इसका एक व्यास AOB खींचिए। वृत पर बिन्दु C लीजिए। C को A और B से मिलाइए।

अर्धवृतACB में व्यास ABके द्वारा अद्र्धवृत के बिन्दुC पर बने कोण का नाम ∠ACB है ।

∠ACBको अर्धवृत का कोण कहते हैं ।

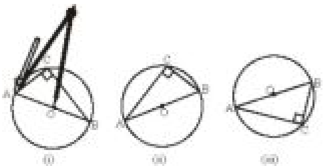


आकृति 11.1

इस प्रकार किसी वृत के व्यास द्वारा वृत के किसी बिन्दु पर बने कोण को अर्धवृत का कोण कहते हैं ।

इन्हें कीजिए, तर्क से निष्कर्ष निकालिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर आकृति के अनुसार तीन वृत बनाइए जिसका केन्द्र O है। इसमें व्यास AOBखींचिए। इस प्रकार बने एक अर्धवृत में बिन्दु C लीजिए। रेखाखंड AC और BC खींचिए। इस प्रकार ∠ACB अर्धवृत का कोण बन गया है। ∠ACB नापिए तथा अन्तर 90° – ∠ACB ज्ञात कीजिए।



आकृति11.2

तीन अन्य अर्धवृतों के कोणों के साथ भी यही प्रक्रिया दोहराइए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए:

अर्धवृत्त का क्रमांक	<ACB	90° – <ACB
1.		
2.		
3.		

हम पायेंगे कि प्रत्येक बार 90°-<ACBका मान शून्य या लगभग शून्य है । इस प्रकार हम कह सकते हैं कि ∠ACB=90°

अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि -

वृत के व्यास द्वारा अर्धवृत पर किसी बिन्दु पर निर्मित कोण समकोण होता है ।

प्रयास कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर भिन्न- भिन्न त्रिज्याओं के पाँच वृत खींचकर उनके व्यासों द्वारा अर्धवृतों के बिन्दुओं पर निर्मित कोणों की माप चाँदा की सहायता से ज्ञात करें ।

11.2 इस पर चर्चा करके सत्यापित कीजिए :

वृत के व्यास द्वारा अर्धवृत के किसी बिन्दु पर बना कोण समकोण होता है।

व्यास ABके मध्य बिन्दुOको केन्द्र मानकर तथा OA को त्रिज्या लेकर व्यास ABपर एक अर्धवृत बनाइए। अर्धवृत पर एक बिन्दु C लीजिए। रेखाखंड AC औरBCखींचिए। इस प्रकार ∠ACB अर्धवृत का कोण बन गया।

आकृति 11.3

अब एक ट्रेसिंग पेपर लेकर, सेट स्क्वायर की सहायता से एक समकोण त्रिभुर्ज XPY उपर्युक्त चित्र के अनुसार काट कर निकाले । इस प्रकार त्रिभुज का$<XPY$ समकोण है । $<XPY$ को $\angle ACB$ पर इस प्रकार अध्यारोपित कीजिए कि बिन्दु P, बिन्दुCपर पड़े और भुजा PX, भुजा CA पर पड़े। अब क्या PY भुजा CBपर पड़ती है ? हम देखेंगे कि वास्तव में PY,CB पर पड़ती है। इस प्रकार $<XPY$ $\angle ACB$को पूरा-पूरा ढक लेता है।

अत: $\angle ACB=<XPY$

परन्तु $<XPY=90°$

अत: $<ACB=90°=1$ समकोण

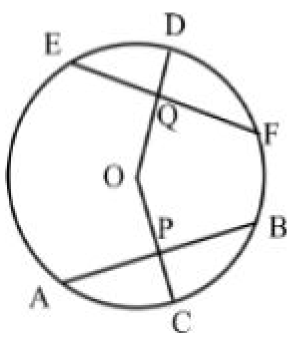
इसी प्रकार अर्धवृत पर एक अन्य बिन्दु D लीजिए। AD और BD को मिलाकर अर्धवृत का कोण $\angle ADB$बनाइए और XPY को $\angle ADB$ पर अध्यारोपित कीजिए। क्या$<XPY$, $\angle ADB$को पूरा-पूरा ढक लेता है ? हम देखेंगे कि$<XPY$, $\angle ADB$ को भी ढक लेता है।

इसलिए$<ADB=<XPY=1$समकोण

अत: वृत के व्यास द्वारा अर्धवृत के किसी बिंदु पर बना कोण समकोण होता है।

अभ्यास 11 (a)

1.पाश्र्व चित्र मेंO वृत का केन्द्र है। निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य कथनों को बताइए :



आकृति11.4

(i) रेखाखंडABजीवा है।

(ii)QF त्रिज्या है।

(iii)OD त्रिज्या है।

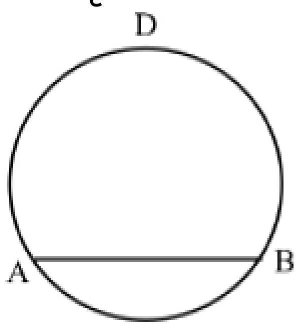
(iv)PC जीवा है।

2.अर्धवृत में बने कोण की माप होती है :

(i) 30^0 **(ii)** 60^0

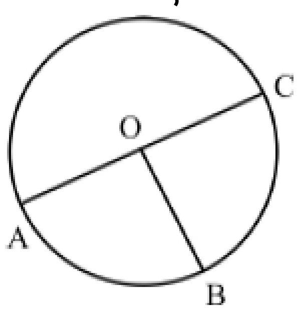
(iii) 180^0 **(iv)** 90^0

3.आकृति 11.5के अनुसार अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक आकृति खींच कर उसके दीर्घ वृतखंड को छायांकित कीजिए।



आकृति 11.5

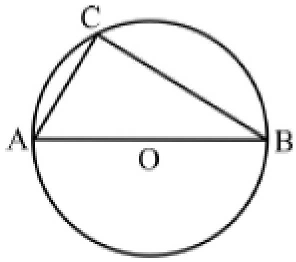
4. आकृति 11.6 मेंO वृत का केन्द्र है। आकृति में निर्मित किन्हीं दो त्रिज्यखंडों के नाम लिखिए।



आकृति 11.6

5. 2.5 सेमी त्रिज्या का एक वृत खींचिए जिसका केन्द्र O है। इस वृत को दो अर्धवृतों में विभक्त कीजिए।

6. आकृति 11.7 में 0 वृत का केन्द्र है। $\angle ACB$कितने अंश का है ? अपने उत्तर के पक्ष में कारण बतायें ।



आकृति 11.7

11.3 चाप का अंशमाप (Degree Measure of an Arc) :

प्रयास कीजिए :

नीचे तीन वृत हैं, जिनके केन्द्र कमश: P,Qतथा R हैं। प्रत्येक वृत में लघु चाप ABके सम्मुख कोण बनाए गये हैं।

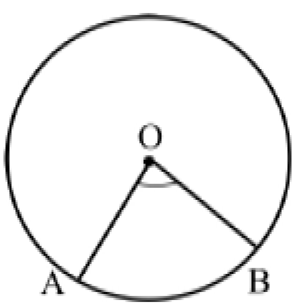
आकृति 11.8

उपर्युक्त वृतों में किस वृत में लघु चाप ABके सम्मुख केन्द्र पर कोण बना है ?

चित्र (i) में लघु चाप ABके सम्मुख केन्द्र पर $\angle AQB$बना है। $\angle AQB$ के माप को चाप AB का अंशमाप कहते है ।

याद रखें :

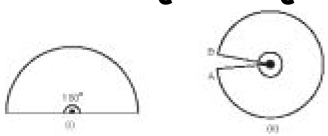
आकृति 11.9 में : O केन्द्र का एक वृत है। इसके लघु चाप ABका अंशमाप, चाप ABके सम्मुख केन्द्र पर बने कोण AOB का माप होता है। लघु चाप ABके अंशमाप को $m\ \widehat{AB}$से प्रर्दिशत करते हैं।



आकृति11.9

चित्र में दीर्घचाप ABका अंशमाप $360^0 - m\widehat{AB}$ है। यहाँ $m\widehat{AB}$ संगत लघुचाप का अंशमाप है। किसी चाप ABकी लम्बाई, चाप AB के द्वारा वृत के केन्द्र पर अन्तरित कोण का समानुपाती होता है ।

11.4. अर्धवृत और वृत के अंशमाप :



आकृति 11.10

उपर्युक्त चित्रों में अर्धवृत और वृत के अंशमाप दिखाये गये हैं । वृत में बिन्दु A तथा बिन्दु B यदि पूर्णत: संपाती हो जाँय, तो वृत का अंशमाप 360° हो जायेगा ।

अत: अर्धवृत का अंशमाप180° होता है तथा वृत का अंशमाप 360° होता है ।

प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य कथन बतलाइए :

(i) वृत का अंशमाप180° होता है।

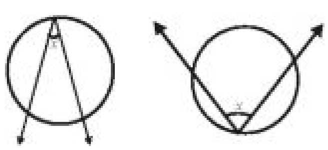
(ii) दीर्घ वृतखंड का अन्तर्गत कोण न्यूनकोण होता है।

(iii) लघु वृतखण्ड का कोण समकोण होता है।

(iv) किसी वृत की सबसे बड़ी जीवा व्यास होती है।

11.5. अन्तर्गत कोण (Inscribed angle)

ध्यान दें



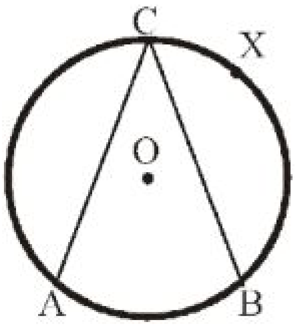
आकृति11.11

उपर्युक्त चित्रों मेंध्यान दे कि <xका शीर्ष वृत का एक बिन्दु है तथा इस कोण की दोनों भुजाएँ वृत को दो अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती है । इस प्रकार का बना<x अन्तर्गत कोण कहलाता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

कोई कोण वृत का अन्तर्गत कोण होता है यदि उस कोण का शीर्ष वृत का एक बिन्दु हो तथा उस कोण की भुजाएँ वृत को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हों।

याद रखें :

पाश्र्वचित्र में 0 केन्द्र का एक वृत है। इसके दीर्घचाप AXB पर एक बिन्दु C है। रेखाखंड CA तथा CB खींचे गये हैं। इस प्रकार ∠ACB, दीर्घचाप AXBका अन्तर्गत कोण है। इसे इस प्रकार भी कह सकते हैं कि दीर्घ चापAXB का अन्तर्गत कोण ∠ACB, लघुचाप AB द्वारा वृत के शेष भाग के बिन्दु C पर बना कोण है।



आकृति 11.12

11.6 किसी चाप के द्वारा केन्द्र पर बने कोण और उसी चाप के द्वारा वृत के शेषभाग में स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण में सम्बन्ध :

इन्हें करिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए :

तीन वृत खींचिए। प्रत्येक का केन्द्र O लीजिए। जैसा कि आकृति 4.13 में दर्शाया गया है।

(i) (ii) (iii)

आकृति 11.13

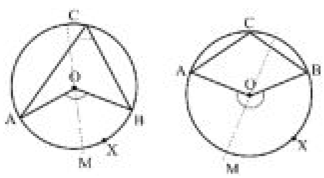
अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्र (1) के अनुसार एक वृत जिसका केन्द्र O’ है खींचिए तथा उस पर दो बिन्दु A और B लीजिए। लघु चाप AB पर बिvर्दुX तथा दीर्घचाप ABपर बिन्दु Cलीजिए।AC,BC, Aएंवंव BOरेखाखण्डों को मिलाइए जिससे अन्तर्गत कोण ACB तथा केन्द्र पर ∠AOB बन गये। ∠ACB तथा ∠AOB को नापिए।

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर उपर्युक्त प्रक्रिया चित्र (2) और (3) के अनुसार दोहराइए। अपनी अभ्यास पुस्तिका पर प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

वृत का क्रमांक	<ACB	<AOB	<AOB - 2 <ACB
1.			
2.			
3.			

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में ∠AOB– 2 ∠ACB शून्य या लगभग शून्य है। अत: प्रत्येक अवस्था में,∠AOB=2<ACB ले सकते हैं ।

इन्हें भी कीजिए और सोचिए : आकृति4.14 के अनुसार अभ्यास पुस्तिका केपृष्ठ पर एक वृत खींचिए और उसका केन्द्र Oमानिए। वृत पर दो बिन्दु A औरB लीजिए। लघु चाप AB में कोई बिvर्दुे लीजिए तथा वृत के शेष भाग पर बिन्दु C लीजिए। रेखाखण्डोंAC,BC,AO एंवBO को खींचिए। इस प्रकार चापAXB द्वारा अन्तरित ∠ACB अन्तर्गत कोण तथा ∠AOB केन्द्र पर अन्तरित कोण हैं।



आकृति 11.14

एक ट्रेसिंग पेपर पर चित्र (i) को ट्रेस कीजिए। इस प्रकार इस कागज पर भी O केन्द्र वाले वृत पर ∠AOB और ∠ACB बन गये। कागज को ऐसा मोड़िए कि बिन्दु A, बिन्दुB पर पड़े जिससे चाप AXBका मध्य बिन्दु M प्राप्त हो जाए। इस प्रकार ∠AOBदो बराबर कोणों ∠AOM तथा ∠MOBमें विभक्त हो गया।

इस प्रकार ∠AOM==∠MOBक्योंकि OM पर आकृति को मोड़ने पर OAभुजा, OB को ढBक लेती है। अत: ∠AOM =∠MOB= $\frac{1}{2}$AOB । अब कागज पर बने ∠AOM को अभ्यास पुस्तिका पर बने ∠ACBपर रखिए। हम देखेंगे कि ये दोनों कोण एक दूसरे को ढBक लेते हैं।

इसलिए ∠ACB= ∠AOM

परन्तु ∠AOM = $\frac{1}{2}$AOB

अत: ∠ACB= $\frac{1}{2}$ ∠AOB

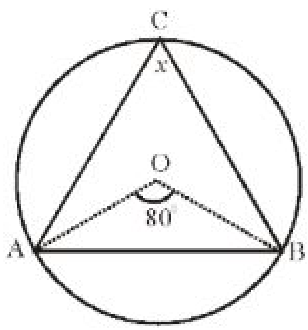
यही प्रक्रिया चित्र (ii) के लिए दोहराइए। हम देखेंगे कि

$\angle ACB = \frac{1}{2} AOB$

अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, उसी चाप द्वारा वृत के शेष भाग में स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दो गुना होता है ।

उदाहरण 1: यदि किसी आकृति 11.15 में में O दिये गये वृत का केन्द्र है । x का मान ज्ञात करें ।



आकृति 11.15

हल : दिया है $\angle A = 80°$

तथा $\angle ACB = ?$

चूंकि $\angle AOB$ चाप Bद्वारा वृत के केन्द्र Oपर अन्तरित कोण है तथा $\angle ACB$ उसी चाप ABद्वारा वृत के शेष भाग के बिन्दु C पर आन्तरित कोण हैं ।

$\angle AOB = 2(\angle ACB)$

या, $80^0 = 2x$

या, $2x = 80^0$

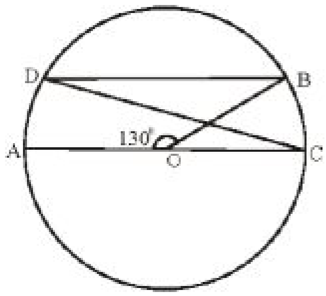
या, $x = \frac{1}{2}(80^0)$

या, $x = 40^0$

इस प्रकार्र x का मान 40° है ।

उदाहरण 2: आकृति 11.16में दिये गये वृत का केन्दुO है । OC वृत का व्यास है, BD जीवा है, OB और CD को मिलाया गया है। यदि $\angle AOB = 130°$, तो $\angle BDC$ का मान

ज्ञात करें



आकृति 11.16

हल : दिया है, AOC वृत का व्यास है, तथा $\angle AOB=130^0$

< $\angle BDC=?$

तथा AOC सरल रेखा है

$\therefore \angle BOC + \angle AOB = 180^0$

या $\angle BOC + 130^0 = 180^0$

या, $\angle BOC = 180^0 - 130^0$

या, $\angle BOC = 50^0$

चूंकि $\angle BOC$ चापBC द्वारा वृत के केन्द्र पर अन्तरित कोण है तथा <BDCउसी चाप BCद्वारा वृत के शेष भाग D पर बना कोण है। अत :

$\angle BOC = 2(\angle BDC)$

या, $50^0 = 2 (\angle BDC)$

या, $2 (\angle BDC) = 50^0$

या, $\angle BDC = \frac{50^0}{2}$

या, $\angle BDC = 25^0$

या: $\angle BDC = 25^0$

अभ्यास 11 (b)

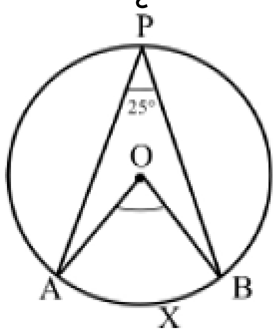
1. अत : अर्धवृत का अंशमाप होता है :

(i) 45^0 **(ii)** 90^0 **(iii)** 180^0 **(iv)** 360^0

2. किसी वृत में यदि उसके किसी लघुचाप का अंशमाप70° है, तो उसके दीर्घचाप का अंशमाप कितना होगा ?

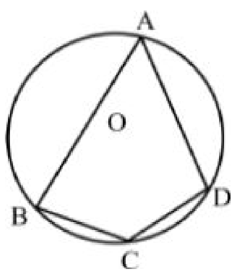
3. किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण तथा उसके द्वारा वृत के शेष भाग पर स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण में क्या सम्बन्ध होता है ?

4. आकृति 11.17 मेंO वृत का केन्द्र है। चाप AXBका अंशमाप बनाइए।



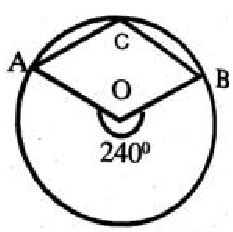
आकृति 11.17

5.आकृति 11.18 में लघु चाप BCD एवं दीर्घ चापBAD के अन्तर्गत कोणों के नाम बताइए।



आकृति 11.18

6. आकृति 11.19 में 0 वृत का केन्द्र हैं, A,C,Bवृत पर तीन बिन्दु है,तथा ∠AOBका प्रतिवर्ती कोण=240° है तो ∠ACB का मान ज्ञात करें ।

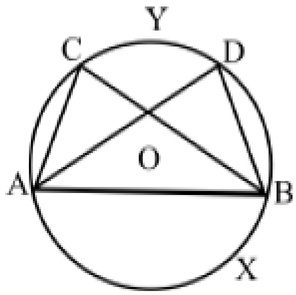


आकृति 11.19

इन्हें कीजिए सोचिए और लिखिए :

एक ही वृतखंड के कोण

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक वृत खींचिए जिसका केन्द्र O हो। इसमें जीवाAB खींचिए। इस प्रकार वृत दो भागों AXB और AYB में बBट गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए।रेखाखण्डों AC, BC, AD एवं BD को खींच दीजिए।



आकृति 11.20

इस प्रकार ∠ACBऔर ∠ADBएक ही चाप AYBके अन्तर्गत कोण या एक ही वृतखंड के कोण हैं। दोनों कोण एक ही चाप AYBको अन्त:खंडित करते हैं।

अत:

यदि दो कोण किसी वृत के एक ही चाप को अन्त: खंडित करते हों अर्थात् उनके शीर्ष उसी चाप पर हों, तो उन्हें एक ही चाप के अन्तर्गत कोण या एक ही वृतखंड के कोण कहते हैं ।

11.7 एक ही वृतखंडों के कोणों में संबंध

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए :

(i) (ii) (iii)

आकृति 11.21

उपर्युक्त आकृति में (i) के अनुसार अपनी अभ्यास पुस्तिका पर बिन्दु 0 को केन्द्र मानकर एक वृत खींचिए। इसमें एक जीवा AB खींचिए। इस प्रकार वृत दो भागों AXB और AYB में बँट गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए।रेखाखण्डों AC AD, BC एवं BD को खींच दीजिए। इस प्रकार ∠ACB और ∠ADB एक ही वृतखंड ∠AYB के कोण बन गए।

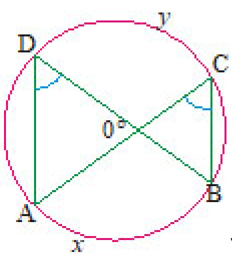
∠ACB और ∠ADB को नापिए तथा ∠ACB - ∠ADB ज्ञात कीजिए। इसी प्रकार आकृति(ii) और (iii) के अनुसार दो अन्य वृत अपनी अभ्यास पुस्तिका पर खींचकर उपर्युक्त प्रक्रिया को दोहराइए और प्राप्त परिणामों को अपनी-अपनी अभ्यास पुस्तिका पर निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

वृत्त का क्रमांक	ACB	ADB	ACB - □ ADB
(i)			
(ii)			
(iii)			

हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में ∠ACB - ∠ADB का मान शून्य या लगभग शून्य है। अत: प्रत्येक स्थिति में हम कह सकते हैं कि ∠ACB =∠ADB है।

इन्हें भी कींजिए, चर्चा करें तथा निष्कर्ष निकालिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक वृत खींचिए जिसका केन्द्र O हो। वृत पर दो बिन्दु A और B लीजिए। वृत दो चापों AXB और AYB में विभक्त हो गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए।रेखाखण्डों AC, BC,AD और BD को खींच दीजिए।



आकृति 11.22

जिसमें ∠ACB और ∠ADBएक ही वृतखंड AYB के कोण बन गए।

अब ट्रेसिंग कागज पर ∠ACB के बराबर ट्रेस कर के उसे काट कर अलग कीजिए तथा इसे ∠ADB पर इस प्रकार रखिए कि बिन्दु C, बिन्दु D पर और भुजा CA, भुजा DA पर पड़े। अब देखिए कि क्या∠ACB की भुजा CB, भुजा DB पर पड़ती है ? हम देखेंगे कि भुजा CB, भुजा DB पर ही पड़ती है।

इस प्रकार ∠ACB =∠ADB

अत: ∠ACB =∠ADB

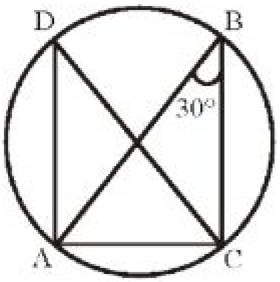
अब ∠ACB की ट्रेस कापी इस प्रकार घुमाइए कि बिन्दु C, चाप AYB के बिन्दु E पर रहे तथा CA सदैव A से जाए तो, हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में C बिन्दु से ही होकर

जाएगी। अत: चाप AYBपर यदि कोई बिन्दु E है, तो ∠AEB=<ACB=<ACB

अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

एक ही वृतखंड के कोण या एक ही चाप के अन्तर्गत कोण समान होते है ।

उदाहरण 3: आकृति 11.23 में में दो जीवा AB तथा CD वृत के अन्दर किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं ।∠ABC= 30



आकृति 11.22 **आकृति 11.23**

हल: दिया है ∠ABC = 30°

तो ∠CDA = ?

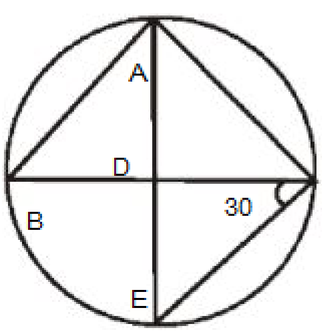
∠CDA तथा ∠ABC = एक दीर्घ चाप AC के अंतर्गत कोण है |

अत: ∠CDA = ∠ABC

या ∠CDA = 30°

इस प्रकार∠ CDA = 30°

उदाहरण 3: आकृति11.24 में त्रिभुज ABC एक वृत्त के अंदर अंतरित है।∠BAC का समद्विभाजक BC को D पर तथा वृत्त के बिन्दु E पर मिलाता है। यदि ∠ECD=30° तो ∠ABC मान क्या है ?



आकृति 11.24

हल: ∠BAD = ∠BCE

या, $\angle BAD = 30^0$

AE $\angle BAC$समद्विभाजक है

अत :$\angle BAC = 2\ \angle BAD$

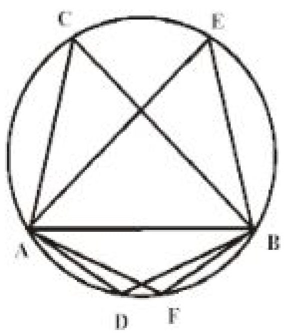
या, $\angle BAC = 2 \times 30^0$

या, $\angle BAC = 60^0$

इस प्रकार $\angle BAC = 60^0$

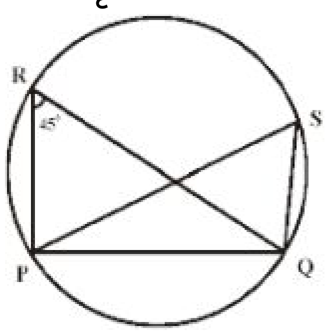
अभ्यास **11 (c)**

1 आकृति 11.25 में एक ही वृतखंड में बने कोणों के नाम लिखिए।



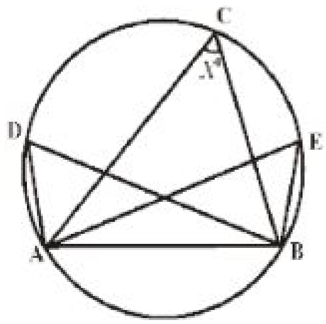
आकृति11.25

2. आकृति 11.26 में बने कोण PRQ =450, तो $\angle PSQ$ का मान बताइए।



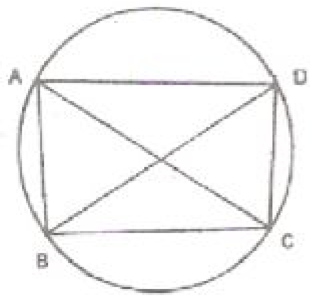
आकृति 11.26

3. आकृति 11.27 में यदि $\angle ACB = x$तो $\angle ADB$ एवं $\angle AEB$ के मान बताइए।



आकृति 11.27

4. आकृति11.28 में बने कोणों के सम्बन्ध में निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य कथनों को छाँटिए :



आकृति 11.28

(i) $\angle BDC = \angle BAC$

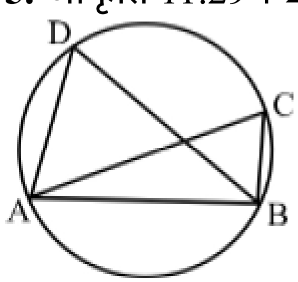
(ii) $\angle BDC = \angle BCA$

(iii) $\angle ACB = \angle ADB$

(iv) $\angle BDA = \angle CDB$

(v) $\angle ACD = \angle DBA$

5. आकृति 11.29में $\angle ACB$ के बराबर निम्नलिखित में से कौन सा कोण है ?



आकृति11.29

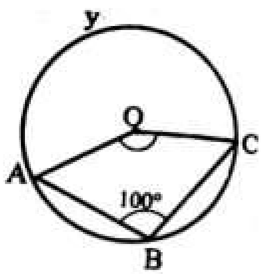
(i) ∠ABD **(ii)** ∠ADB

(iii) ∠DBC **(iv)** ∠BAD

का अंशमाप एवं अभ्यास आकृति 11.29 में <ACB के बराबर निम्नलिखित में से कौन सा कोण है ?

समेकित उदाहरण :

उदारहण 5: तीन बिन्दु A,B तथा Cएक वृत पर स्थित है। बिन्दु O वृत का केन्द्र है। यदि ∠ABC= 100°, तो ∠AOC ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.29 **आकृति 11.30**

हल : चूँकि चाप AYC द्वारा केन्द्र O पर वृहत्कोण ∠AOC तथा वृत के शेष भाग पर स्थित बिन्दु B पर ∠ABCबनता है।

इसलिए वृहत्कोण ∠AOC = 2 ∠ABC

परन्तु ∠ABC = 100^0

अत: वृहत्कोण ∠AOC = 2 × 100^0

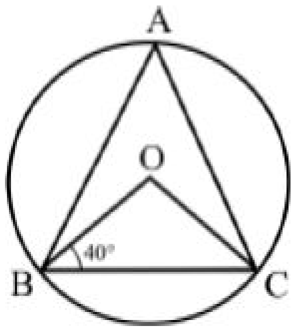
= 200^0

या अधिक कोण ∠AOC = $360^0 – 200^0$

= 160^0

या ∠AOC = 160^0

उदाहरण 6 :आकृति 11.31 में बिन्दु O वृत का केन्द्र है। दीर्घ चाप ABC पर एक बिन्दु है । यदि<OAB=30, तो ∠ACB का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.31

हल : $\Delta 0AB$में

चूँकि 0A =0B (क्योंकि एक ही वृत की त्रिज्याएँ हैं।)

अत: $\angle OBA = \angle OAB = 30^0$

या $\angle AOB = 180^0 - \angle OBA - \angle OAB$

$= 180^0 - 30^0 - 30^0$

$= 180^0 - 60^0$

$= 120^0$

लघुचाप ABद्वारा केन्द्र पर $\angle AOB$ और वृत के शेष भाग के बिन्दु C पर $\angle ACB$ बना है।

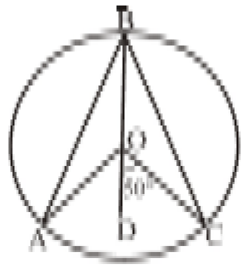
अत**:** $\angle ACB = ½AOB$

$= ½ \times 120^0$

$= 60^0$

दक्षता अभ्यास 11

1. आकृति 11.32 में वृत का केन्द्र O है। रेखाBOD, $\angle AOC$ की समद्विभाजक है, तथा $\angle COD=50°$, तो $\angle ABC$ की माप होगी:

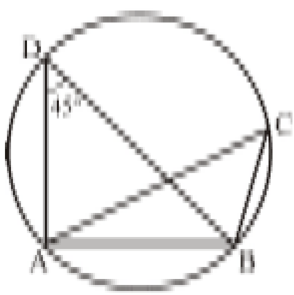


आकृति 11.32

(i) 50^0 **(ii)** 25^0

(iii) 100^0 **(iv)** 120^0

2. आकृति 11.33 में ABवृत की जीवा है और बिन्दु C तथा D वृत पर है। यदि $\angle ADB=45°$ तो $\angle ACB$ की माप होगी:

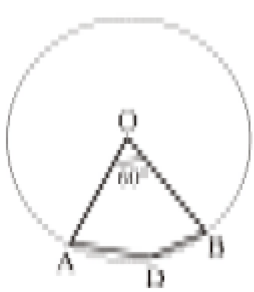


आकृति 11.33

(i) 90^0 **(ii)** 135^0

(iii) 45^0 **(iv)** $22\frac{1}{2}^0$

3. आकृति 11.34 में बिन्दु O वृत का केन्द्र है और $\angle AOB = 60^0$, < $\angle ADB$ की माप होगी :

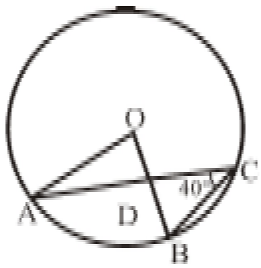


आकृति 11.34

(i) 120^0 (ii) 150^0

(iii) 140^0 (iv) 30^0

4. आकृति 11.35 में बिन्दुO वृत का केन्द्र है। इस पर तीन बिन्दु A, Bतथा C है। यदि $\angle ACB=40°$, तो $\angle AOB$की माप होगी :

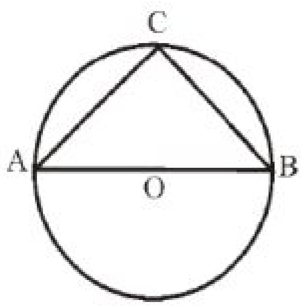


आकृति11.35

(i) 20^0 (ii) 40^0

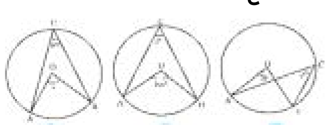
(iii) 60^0 (iv) 80^0

5. आकृति11.36 में बिन्दु O केन्द्र का एक वृत है। वृत की दो समान जीवाएँ AC औरBC खींची गयी हैं। $\angle ABBC$का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.36

6. निम्नांकित वृतों में प्रत्येक का केन्द्र O है। प्रत्येक में x का मान ज्ञात कीजिए।



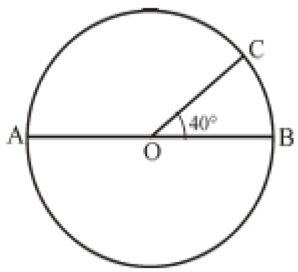
आकृति 11.37

7. वृत की एक जीवा की लम्बाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा लघुवृतखंड पर अन्तरित कोण ज्ञात कीजिए।

8. 3.0 सेमी त्रिज्या का एक वृत खींचिए। इस वृत की एक जीवा खींचकर वृत को दो वृतखंडों में विभक्त कीजिए।

9. अद्र्धवृत किसे कहते हैं ? चित्र बनाकर स्पष्ट कीजिए।

10. आकृति 11.38 में बिन्दु 0 वृत का केन्द्र है। A0B वृत का व्यास है और ∠C0B =400 । ज्ञात कीजिए :



आकृति 11.38

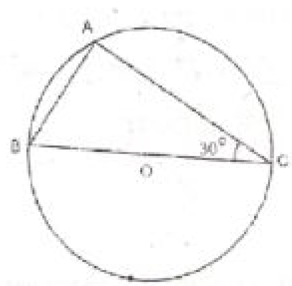
(i) दीर्घचाप BCका अंशमाप

(ii) दीर्घचाप ACका अंशमाप

(iii)लघुचाप ACका अंशमाप

(iv) अर्धवृत ACB का अंशमाप

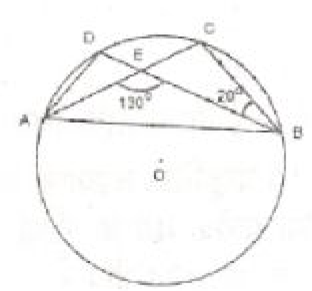
11.आकृति 11.39 में O वृत का केन्द्र है। इसके अन्तर्गत एक ∆ABCबना है। यदि ∠ACB =300 तो ∠A और ∠B ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.39

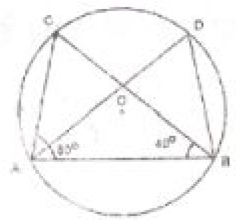
12. वृत की एक जीवा की लम्बाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा दीर्घ वृतखंड पर अन्तरित कोण ज्ञात कीजिए।

13. आकृति 11.40 में O वृत का केन्द्र है। ∠AEB = 130^0 और ∠EBC=200, तो ∠BDA का मान ज्ञात कीजिए।



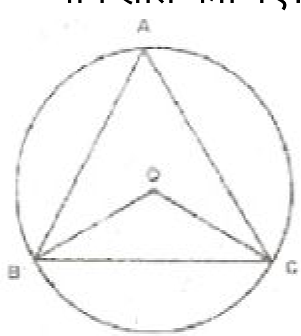
आकृति 11.40

14. आकृति 11.41 में O वृत का केन्द्र है। ∠ABC=400 और ∠CAB=800, तो ∠ADB का मान ज्ञात कीजिए।



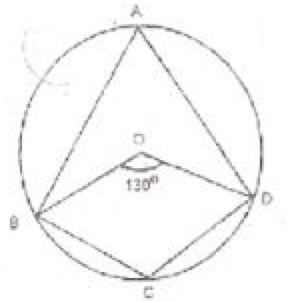
आकृति 11.41

15. आकृति 11.42 में 0 वृत का केन्द्र है तथा ΔABCएक समबाहु त्रिभुज है। ∠B0Cका मान ज्ञात कीजिए।



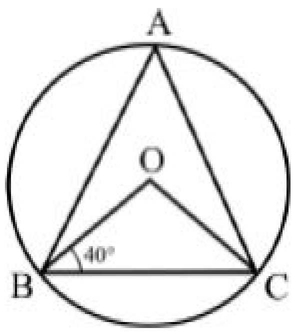
आकृति 11.42

16. आकृति 11.43 में 0 वृत का केन्द्र है और ∠B0D =1300, ∠BCD की माप ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.43

17.आकृति 11.44में 0 वृत का केन्द्र है। $\angle OBC = 40^0$, < $\angle BAC$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.44

इकाई में हमने सीखा :

1.किसी वृत के व्यास द्वारा वृत के किसी बिन्दु पर बने कोण को अर्धवृत का कोण कहते है ।

2.अर्धवृत का कोण समकोण होता है ।

3.किसी चाप के अन्त्य बिन्दुओं को केन्द्र से मिलाने वाली त्रिज्याओं से उस चाप के सम्मुख केन्द्र पर बना कोण उस चाप का अंशमाप कहलाता है ।

4.अर्धवृत का अंशमाप180° होता है तथा वृत का अंशमाप 360° होता है ।

5 कोई कोण वृत का अन्तर्गत कोण होता है, यदि उस कोण का शीर्ष वृत का एक बिन्दु हो तथा उस कोण की भुजाएँ वृत को अलग-अलग बिन्दुओं पर का:ती हैं ।

6.एक ही चाप में एक से अधिक अतंर्गत कोण हो सकते हैं ।

7.एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, उसी चाप द्वारा वृत के शेष भाग में स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दो गुना होता है ।

8. यदि दो कोण के शीर्ष किसी वृत के एक ही चाप को अन्त:खंडित करते हो अर्थात् उनके शीर्ष उसी चाप पर हों तो उन्हें एक ही चाप के अन्तर्गत कोण या एक ही वृतखंड के कोण कहते है । इन दोनों कोण के मान आपस में समान होते हैं ।

भ्यास 11 (a)

1. 90^0, **3.** AOB एवं BOC; **5.** $\angle ACB = 90^0$

अभ्यास 11 (b)

1. (iii) 180^0; **2.** 290^0; **3.** 2 : 1; **4.** चाप AXB का अंशमाप $=70^0$; **5.** $\angle BCD$ एवं $\angle BAD$; **6.** $\angle ACB = 120^0$

अभ्यास 11 (c)

1. $\angle ACB$, $\angle AEB$ एक ही वृतखंड (दीर्घ) के कोण हैं। $\angle ADB$, $\angle AFB$एक ही वृतखंड (लघु) के कोण हैं; **2.** $\angle PRQ = \angle PSQ = 45^0$; **3.**$\angle ADB = x^0$ तथा $\angle AEB = x^0$; **4.** (i) सत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य, (v) सत्य, **5.** (ii) $\angle ADB$

दक्षता अभ्यास 11

1. (i) 50^0; **2.** (iii) 45^0; **3.** (ii) 150^0; **4.** (iv) 80^0; **5.** 45^0; **6.** (i) 80^0; (ii) $52\frac{1^0}{2^0}$,

(iii) 35^0; **7.** 150^0; **10.** (i) 320^0, (ii) 220^0, (iii) 140^0, (iv) 180^0;

11. $\angle A = 90^0$, $\angle B = 60^0$;

12. 30^0; **13.** 110^0; **14.**60^0; **15.** 120^0; **16.** 115^0; **1 7.** 50^0

इकाई : 12 क्षेत्रमिति (मेंसुरेशन)

B25XH7

- **आयताकार मार्ग का क्षेत्रफल**
- **त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल**
- **समान्तर चतुर्भजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल**
- **समचतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल**
- **घन एवं घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ**

12.1 भूमिका :

आप एक ही तल पर बने वि भिन्न प्रकार की आकृतियों जैसे: त्रिभुज, आयत, वर्ग, समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज आदि से परिचित हो चुके हैं। साथ ही आप ठोस वस्तुओं में घन व घनाभ के पृष्ठों की आकृतियों से भी भली- भाँति परिचित है। इस प्रकार विभिन्न बन्द आकृतियों की परिसीमा (Boundary) की लम्बाई भिन्न- भिन्न हैं तथा प्रत्येक बन्द आकृति अपने तल का कुछ निश्चित भाग घेरती हैं जो क्षेत्रफल कहलाता हैं। ऐसी बन्दु आकृतियों की परिसीमा की लम्बाई तथा इनके द्वारा अपने तल पर घेरे गये निश्चित भागों के माप की आवश्यकता पड़ती है। इस प्रकार हम एक तलीय बन्द आकृति की परिसीमा की माप जिस भौतिक राशि से करते हैं उसे उस आकृति का परिमाप कहते हैं। अत: परिमाप एक बन्द आकृति के चारो ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल एक बन्द आकृति द्वारा घेरे गये तल के भाग या क्षेत्र को दर्शाता है।

प्राय: हम देखते हैं कि खेतों, पार्कों या बगीचों में उनके चारों ओर कुछ स्थान पथ के रूप में छोड़ दिया जाता है। इसी प्रकार चित्रों या पेटिंग को प्रेम करके कुछ स्थान छोड़ दिया

जाता है। हमें ऐसे पथों या बार्डरों के बनाने में व्यय ज्ञात के लिए इनके क्षेत्रफलों को ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। आप इस इकाई में एक ही तल में स्थित वि भिन्न प्रकार की बन्द आकृतियों आयत, वर्ग, समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज तथा विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों के परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों के बारे में अध्ययन करेंगें साथ ही ठोस वस्तुओं में घन व घनाभ के पृष्ठों के परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों के बारे में अध्ययन करेंगें।

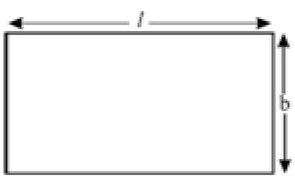
12.2 आयत तथा वर्ग का परिमाप और उनसे घिरे क्षेत्रों के क्षेत्रफल :

आयत का परिमाप

हम जानते हैं कि :

आयत का परिमाप= चारों भुजाओं की लम्बाइयों का योगफल।

आकृति12.1 में आयत की लम्बाई=l



आकृति 12.1

आयत की चौड़ाई =b

आयत का परिमाप= $(l + l + b + b)$

$= (2l + 2b)$

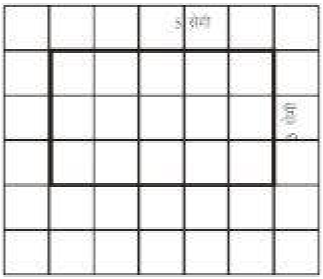
$= 2(l + b)$

आयत का क्षेत्रफल :

जिस प्रकार हम किसी रेखा की लम्बाई मापने के लिए मात्रक 1 सेमी का प्रयोग करते है, जिसका माप पटरी पर अंकित है, उसी प्रकार क्षेत्रफल की गणना करने के लिए मात्रक वर्ग सेमी या सेमी^{2} का प्रयोग करते है जिसका अर्थ ऐसे वर्ग द्वारा घिरे क्षेत्रफल से है जिसकी भुजाएँ 1 सेमी की हों। इसी प्रकार 1मी^{2} क्षेत्रफल का अर्थ ऐसे क्षेत्र से है जो 1

मी भुजा वाले वर्ग से घिरा हो। एक वर्गांकित पेपर की सहायता से, क्या हम बता सकते है कि एक आयत का क्षेत्रफल कितना होगा, जिसकी लंबाई 5 सेमी तथ चौड़ाई 3 सेमी है?

ग्राफ पेपर पर एक आयत बनाइए जिस पर 1 सेमी×सेमी के वर्ग हों (आकृति 12.2 देखिए)



आकृति12.2

यह आयत 15 वर्गों को पूर्णतया ढँक लेता है।

आयत का क्षेत्रफल=15 वर्ग सेमी है, जिसे हम

5× 3 वर्ग सेमी (ल0× चौ0) के रूप में भी लिख सकते हैं।

इन्हें कीजिए :

कुछ आयतों की भुजाओं की मापें दी गई हैं। इन्हें ग्राफ पेपर पर रखकर तथा वर्गों की संख्या को गिनकर इनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

लम्बाई	**चौड़ाई**	**क्षेत्रफल**
3 सेमी	2 सेमी	....
5 सेमी	4 सेमी	....
6सेमी	5 सेमी	....

इससे हम क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

हमने देखा कि

आयत का क्षेत्रफल=लंबाई× चौड़ाई

बिनाग्राफ पेपर की सहायता से क्या हम एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं, जिसकी लंबाई 6 सेमी तथा चौड़ाई 4 सेमी है ?

हाँ, यह संभव है।

आयत का क्षेत्रफल= लंबाई× चौडाई

=6 सेमी × 4सेमी=24 वर्ग सेमी

आयत का परिमाप=2 (लम्बाई + चौड़ाई)

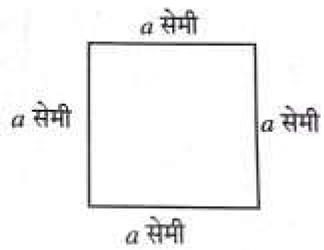
आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई× चौड़ाई

प्रयास कीजिए :

1. अपने कक्षा के आयताकार फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

2. अपने घर के किसी एक आयताकार दरवाजे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

वर्ग का परिमाप और उससे घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल :



आकृति 12.3

आकृति 12.2

यह आयत 15 वर्गों को पूर्णतया ढँक लेता है।

आयत का क्षेत्रफलआकृति12.3में वर्ग की भुजा=a सेमी

वर्ग का परिमाप= चारों भुजाओं का योग

= (a + a + a + a)

= 4a सेमी

वर्ग का परिमाप=4× भुजा

वर्ग का क्षेत्रफल =भुजा × भुजा

$=a\times a= a^2$

वर्ग का परिमाप=4Xभुजा, वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा^{2}

क्षेत्रफल के मात्रक :

∴वर्ग का क्षेत्रफल= सेमी^{2}

उपर्युक्त कथन की निम्नलिखित प्रकार से व्याख्या कर सकते है :

∴ 1 सेमी= 10 मिमी

वर्ग का क्षेत्रफल=(10मिमी)^2

= 100 मिमी^{2}

दोनों प्रकार से हल किये गये वर्ग का क्षेत्रफल की तुलना कीजिए।

हमने देखा, दोनों क्षेत्रफल समान हैं।

अत: 1सेमी^{2}=100 मिमी^{2}

इन्हें कीजिए :

निम्नांकित क्षेत्रफलों की जाँच कीजिए।

1डेसीमी =10 सेमी,

इसलिए 1 डेसीमी^{2}=100 सेमी^{2}

1 मीटर =10 डेसीमी,

इसलिए 1 मीटर^2=100 डेसीमी^{2}

1 डेकामी =10 मीटर,

इसलिए 1 डेकामी^{2}=100 मीटर^2

हम यह भी जानते हैं कि भूमि की माप एअर और हेक्टेयर में की जाती है।

1 एअर= 100 मी^{2}

1 हेक्टेयर=10 एअर=100 मी^{2}

=10000 मी^{2}

उदाहरण 1: शायना 70 मी भुजा वाले वर्गाकार पार्क के किनारे-किनारे (चारों ओर) 3 चक्कर लगाती है। उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : वर्गाकार पार्क का परिमाप=4× एक भुजा की लम्बाई

=4×70 मी =280 मी

1 चक्कर में तय की गयी दूरी=280 मीटर

इसलिए तीन चक्कर में तय की गई दूरी=3×280 मी =840मी

उदाहरण 2: पिंकी 75 मी भुजा वाले वर्गाकार मैदान के किनारे-किनारे चक्कर लगाती है। बॉब एक आयताकार मैदान जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमश: 160 मी और 50 मी है, के किनारे-किनारे चक्कर लगाता है। दोनों में से कौन अधिक और कितनी अधिक दूरी तय करता है।

हल : पिंकी द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी=वर्ग का परिमाप

=4× एक भुजा की लम्बाई

=4 x 75 मी=300 मी

बॉब द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी= आयत का परिमाप

=2× (लंबाई + चौड़ाई)

=2× (160मी + 50मी)

=2×210मी =420 मी

तय की गई दूरियों में अंतर= 420मी - 300मी =120मी

बॉब पिंकी से120 मीटर अधिक दूरी तय करता है।

उदाहरण 3 : एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करें। जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमश: 12मी तथा 5 मी है।

हल : आयत की लंबाई=12 मी, आयत की चौड़ाई =5मी

आयत का क्षेत्रफल=लम्बाईx चौड़ाई

=12मी × 5मी =60वर्गमी

उदाहरण 4 एक वर्गाकार भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसकी एक भुजा 9 मी है।

हल : वर्ग की भुजा=9 मी

वर्ग का क्षेत्रफल =भुर्जा× भुजा

=9मी× 9मी

=81 वर्ग मीटर

उदाहरण 5: एक आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल 117 वर्ग सेमी है, इसकी लंबाई 13 सेमी है तो गत्ते की चौड़ाई ज्ञात करें।

हल : आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल =117वर्ग सेमी

लंबाई=13सेमी

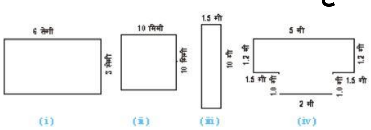
चौड़ाई=?

आयत का क्षेत्रफल =लंबाई × चौड़ाई

चौड़ाई = $\frac{\text{आयत का क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}}$ == $\frac{117}{13}$ सेमी= 9सेमी

अभ्यास 12 (a)

1. निम्नांकित आकृतियों के परिमाप ज्ञात कीजिए।



आकृति12.4

2. प्रश्न संख्या 1 में दी गई आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए।

क्रमांक	आयत			
	लम्बाई	चौड़ाई	परिमाप	क्षेत्रफल
1.	5 मीटर	.....	....	20 मी²
2.	8 मीटर	.....	....	24मी²
3.	5 सेमी	.....	18 सेमी	.....
4.	.....	30 सेमी	480 सेमी	.....

4. निशा के विद्यालय में खेल के मैदान की लम्बाई 60 मीटर, चौड़ाई50 मीटर है। खेल के मैदान का क्षेत्रफल एअर में बताइए।

5. अविनाश के कृषि फार्म की लम्बाई 240मीटर और चौड़ाई110 मीटर है। कृषि फार्म का क्षेत्रफल हेक्टेयर में ज्ञात कीजिए।

6. एक आयताकार मैदान का क्षेत्रफल 0.5हेक्टेयर है। यदि इस आयताकार मैदान की एक भुजा 125 मीटर है, तो दूसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

7. एक वर्गाकार टाइल की एक भुजा 12 सेमी है। टाइल का क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. एक खेत की लम्बाई और चौड़ाई में 3:2 का अनुपात है। खेत के चारों ओर मेड़ बनवाने का खर्च1.50 प्रतिमीटर की दर से बताइए जब कि खेत का क्षेत्रफल 1.5 हेक्टेयर है।

9. एक कार्यालय के 15 दरवाजों पर खस की टट्टियाँ लगानी हैं। प्रत्येक दरवाजों की लम्बाई 2.5 मी और चौड़ाई 1.2 मी है। यदि खस की टट्टी लगाने का खर्च खस के मूल्य सहित 105.0 प्रतिवर्ग मीटर हो, तो कुल कितना खर्च पड़ेगा?

12.3 क्षेत्रफल का अनुप्रयोग :

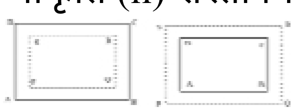
1. आयताकार मार्ग का क्षेत्रफल :

प्राय: खेतों, पार्कों या बगीचों में उनके चारो ओर या बीच में चौपड़ की तरह आयताकार कुछ स्थान पथ के रूप में छोड़ दिया जाता है। ऐसे पथों या बार्डरों के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने में आयत के क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि का प्रयोग किया जाता है।

इन्हें देखिए :

आकृति12.5 की (i) और (ii को देखिए। दोनों आकृति आयताकार पार्क के हैं। प्रत्येक पार्क की लम्बाई 40 मीटर और चौड़ाई 30मीटर है। इनमें बने रास्तों की चौड़ाई 2मीटर है। आकृति (i) में रास्ता बिन्दुदार रेखाओं से प्रर्दिशत पार्क के अन्दर चारों ओर है।

आकृति (ii) रास्ता बिन्दु रेखाओं से प्रदर्शित पार्क के बाहर चारों ओर है।



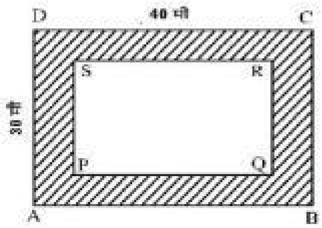
(i) (ii)

आकृति12.5

आकृति (i) और आकृति (ii) में रास्ते को छोड़कर शेष भाग में घास लगी है। प्रत्येक पार्क में बने रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- चित्र – (i) में रास्ते का क्षेत्रफल :

आकृति 12.6 में पार्क ABCD है। इसके अन्दर के रास्ते को छायांकित किया गया है। रास्ते की चौड़ाई 2 मीटर है।



आकृति 12.6

रास्ते को छोड़कर शेष भाग को PQRS से दिखाया गया है, इसी भाग में घास लगी है। आयत PQRS की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

इसकी लम्बाई=40मीटर – (2मी + 2मी)

= 40 मी – 4 मी

=36 मी

आयत PQRS की चौड़ाई=30 मी - (2 मी + 2 मी)

=30 मी - 4 मी

=26मी

अत: घास लगे भाग का क्षेत्रफल-लम्बाई× चौड़ाई

= 36 मी× 26 मी

=936 मी^{2}

आयतABCDका क्षेत्रफल=लम्बाई× चौड़ाई

=40 मी× 30मी

=1200 मी^{2}

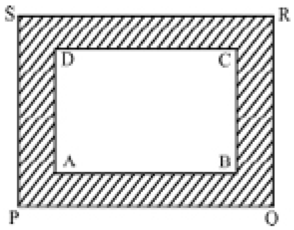
अत: रास्ते का क्षेत्रफल= आयत ABCD का क्षेत्रफल - घास लगे भाग का क्षेत्रफल

=1200 मी^{2} – 936 मी^{2}

=264मी^{2}

• चित्र – (ii) में रास्ते का क्षेत्रफल :

आकृति12.7 में आयताकार पार्क ABCD है। इसकी लम्बाई 40 मी और चौड़ाई 30 मी है।



आकृति 12.7

पार्कका क्षेत्रफल =40 मी× 30 मी

=1200 मी^{2}

पार्क के बाहर की ओर 2 मी चौड़ा रास्ता है।

इस प्रकार इस रास्ते को मिलाकर नया आयताकार क्षेत्र PQRSबना है।

आयत PQRSकी लम्बाई =40 मी + (2मी + 2मी)

=44मी

आयत PQRS की चौड़ाई =30 मी + (2मी + 2मी)

=30 मी + 4 मी

=34 मी

∴ आयतPQRS का क्षेत्रफल=44 मी × 34 मी

=1496 मी^{2}

∴ रास्ते का क्षेत्रफल =आयत PQRS का क्षेत्रफल -पार्क ABCD का क्षेत्रफल

=1496 मी^{2} - 1200 मी^{2}

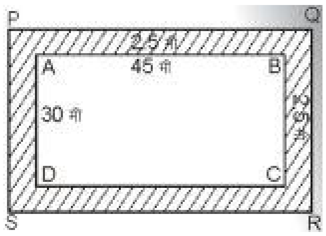
=296मी^{2}

हमने देखा :

1. आकृति 12.6 में रास्ता पार्क के अन्दर की ओर है। अत: अन्दर बने भाग की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करने के लिए रास्ते की चौड़ाई का दुगुना घ टाकर अन्दर बने आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करते हैं।
2. आकृति12.7 में रास्ता बाहर की ओर है। अत: बाहर बने रास्ते सहित भाग की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करने के लिए रास्ते की चौड़ाई का दुगुना आयत की लम्बाई और चौड़ाई में जोड़ देते हैं।

उदाहरण 6: एक आयताकार पार्क 45 मी लंबा और30मी चौड़ा है।पार्क के बाहर चारों ओर एक2.5 मी चौड़ा एक पथ बनाया गया है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति 12.8 ABCD आयताकार पार्क को और छायांकित



आकृति 12.8

क्षेत्र 2.5 मी चौड़े पथ को दर्शाता है।पथ के क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए हम (आयत PQRS का क्षेत्रफल - आयत ABCD का क्षेत्रफल) ज्ञात करने कीआवश्यकता है।

हमें प्राप्त है = (45 + 2.5 + 2.5)मी = 50मी

PS = (30 +2.5 +2.5)मी = 35मी

आयत ABCD का क्षेत्रफल $= l \times b$ = 45 × 30 मी = 1350मी^{2}

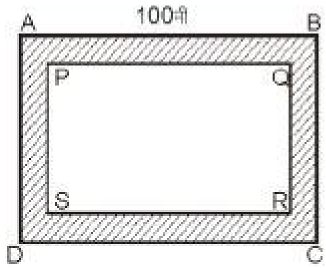
आयत ABCD का क्षेत्रफल $= l \times b$ = 50 ×35मी = 1750मी^{2}

पथ का क्षेत्रफल =आयत PQRS का क्षेत्रफल - आयतABCD का क्षेत्रफल

=(1750 - 1350)मी =400मी^{2}

उदाहरण 7 : 100 मी भुजा वाले एक वर्गाकार पार्क की परिसीमा के साथ लगा हुआ भीतर की ओर एक 5मी चौड़ा पथ बना हुआ है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2500 प्रति 10 मी^{2}की दर से इसे सीमेंट कराने का भी व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति 12.9ABCD 100मी भुजा वाले वर्गाकार पार्क को दर्शाता है तथा छायांकित भाग 5 मी चौड़े पथ को दर्शाता है। यहाँ



आकृति 12.9

PQ = 100 - (5 + 5) = 90मी

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = (100)^2 मी =10,000मी^{2}

वर्ग PQRS का क्षेत्रफल =(भुजा) (90)^{2}मी =81,00मी^{2}

अत: पथ का क्षेत्रफल = (10000 -8100) मी^{2} =19,00मी^{2}

10मी2पर सीमेंट कराने का व्यय = 2500

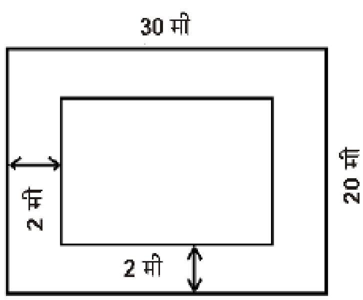
इसलिए, 1मी^{2} पर सीमेंट कराने का व्यय= $\frac{2500}{10}$

अत : 1900मी^{2} पर सीमेंट कराने का व्यय $\frac{2500}{10}$ x 1900

= 475000

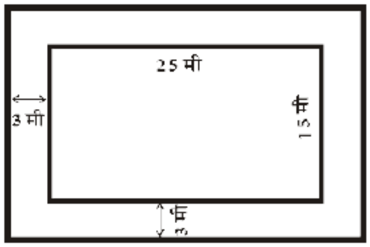
अभ्यास 12 (b)

1. आकृति 12.10 में अंदर वाले आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए:



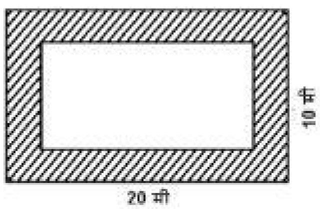
आकृति 12.10

2. आकृति12.11 में बाहर वाले आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए-



आकृति 12.11

3.आकृति 12.12में बने छायांकित रास्ते की चौड़ाई 3 मीटर है। बड़े आयत, छोटे आयत और रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करके रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए -



आकृति 12.12

(i) बड़े आयत का क्षेत्रफल .... मी^{2}

(ii) छोटे आयत का क्षेत्रफल .... मी^{2}

(iii) छायांकित रास्ते का क्षेत्रफल .... मी^{2}

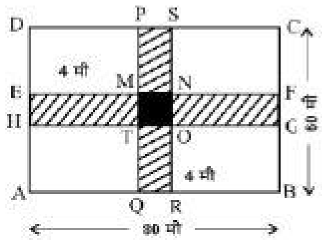
4.एक हाल की लम्बाई 20 मीटर और चौड़ाई 9मीटर है। इसकी दीवारों के चारों ओर फर्श में 2 मीटर चौड़ाई का संगमरमर लगा हुआ है। अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक रफ चित्र बनाकर संगमरमर लगे फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5.एक वर्गाकार बगीचे के चारों ओर 50 सेमी चौड़ाई का मार्ग बना हुआ है। बगीचे की लम्बाई मार्ग सहित 51 मीटर है। बगीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

12.4 आयताकार क्षेत्र के मध्य परस्पर लम्बवत् काटने वाले मार्ग का क्षेत्रफल :

उदाहरण 8 : एक घास के मैदान की लम्बाई 80 मीटर और चौड़ाई 60 मीटर है। मैदान के मध्य में 4 मीटर चौड़े दो मार्ग समकोण पर काटते हुए स्थित है। प्रत्येक मार्ग आयत की भुजाओं के समान्तर है। सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति 12.13 में मार्ग EFGHका क्षेत्रफल $=80\times 4$ मी^{2}



आकृति 12.13

= 320 मी^{2}

(इसमें वर्ग MNOT का क्षेत्रफल सम्मिलित है।)

मार्ग PQRS का क्षेत्रफल=60 x 4मी^{2}

= 240 मी^{2}

(इसमें भी वर्ग MNOT का क्षेत्रफल सम्मिलित है।)

उभयनिष्ठ वर्ग MNOT (दोनों मार्गों पर स्थित) का क्षेत्रफल

= 4 x 4 मी^{2}

=16 मी^{2}

... वर्ग MNOTका क्षेत्रफल 16 वर्ग मीटर दोनों भागों में सम्मिलित है।

$\therefore$ सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल = (320 + 240 – 16) मी^{2}

= (560 – 16)मी^{2}

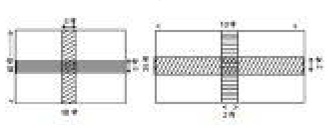
=544 मी^{2}

उपर्युक्त चित्र में हमने देखा कि छायांकित भाग दोनों मार्गों पर स्थित है अत:

परस्पर काटने वाले मार्गों का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात करने हेतु उभयनिष्ठ मार्ग का क्षेत्रफल मार्गों के क्षेत्रफलों के योग में से घटा देते हैं।

अभ्यास 12 (c)

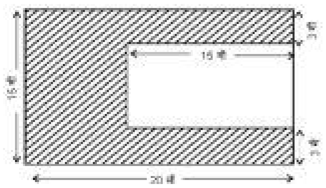
1. आकृति 12.14 में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.14

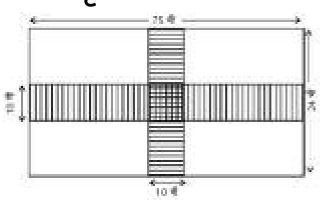
2.एक आयताकार प्रांगण (lawn) की लम्बाई6 मीटर और चौड़ाई 5 मीटर है। इसके मध्य में 2 मीटर चौड़े दो मार्ग इस प्रकार स्थित हैं कि प्रत्येक एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं। एक मार्ग की लम्बाई के समान्तर और दूसरा मार्ग चौड़ाई के समान्तर है। मार्ग पर रु. 2.50 प्रति वर्ग मीटर की दर से वंâकड़ कुटवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

3.आकृति12.15 में छायांकित भार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



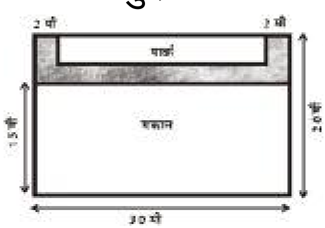
आकृति 12.15

4.आकृति 12.16में उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो छायांकित नहीं है।



आकृति 12.16

5.आकृति12.17 में एक राजकीय भवन का मानचित्र दिया गया है। इसमें सड़क को बिन्दुदार भाग से दिखाया गया है। सड़क की चौड़ाई 2 मीटर है।



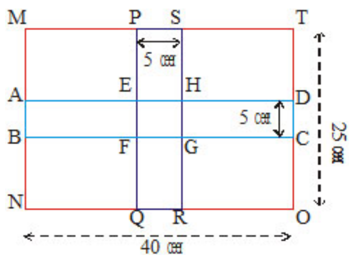
आकृति 12.17

(i) सड़क का क्षेत्रफल बताइए।

(ii) सड़क पर ींइंट बिछवाने का खर्च .45 प्रति वर्गमीटर की दर से क्या होगा ?

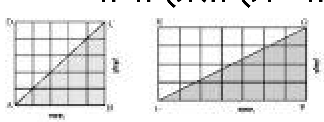
6.अमरूद के एक बाग की लम्बाई 180 मीटर और चौड़ाई 120 मीटर है। बाग के बीचो-बीच एक दूसरे को समकोण पर काटते हुए 3मीटर चौड़े दो रास्ते हैं। रास्ते पर मिट्टी डलवाने का खर्च12.0प्रति मी2 की दर से ज्ञात कीजिए।

7. किसी स्कूल के छात्रों ने सफाई अभियान के लिए एक रैली निकाली। रैली कुछ समय बाद स्कूल से कुछ दूरी पर बने एक आयताकार पार्क में पहुँचीं जिसकी लम्बाई 40 मीटर,तथा चौड़ाई 25 मीटर है। छात्र तीन समूहों में बँट गये और चित्र के अनुसार पार्क में 5 मीटर चौड़े दो परस्पर लम्बवत। रास्तों के क्रमश: ABEF तथा GCDH भागों को प्रथम समूह ने PEHS तथा FQRG भागों को द्वितीय समूह ने और EFGH भाग को तृतीय समूह ने साफ किया। प्रत्येक समूह द्वारा साफ किये गये क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



12.5 त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल :

हम जानते हैं कि वर्ग अथवा आयत के विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है। इनमें से प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल वर्ग अथवा आयत के क्षेत्रफल का आधा होता है। आकृति 12.18 के(i) और (ii) में त्रिभुजों को देखिए:



i **ii**

आकृति 12.18

(i) से त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × वर्गABCD का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2}$ × (AB x BC)

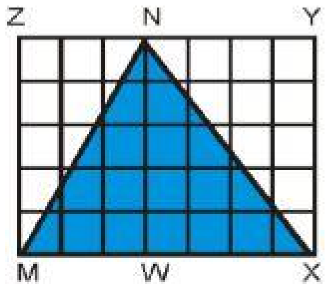
= $\frac{1}{2}$ × (आधार × ऊँचाई)

(ii)से त्रिभुज EFG का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × वर्ग EFGH का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2}$ ×(EF x FG)

= $\frac{1}{2}$ ×(आधार × ऊँचाई)

इन्हे भी देखिए :



आकृति 12.19

आकृति 12.19 में ΔNMXसमकोण त्रिभुज नहीं है। इस चित्र में भी ΔNWX का क्षेत्रफल, आयत WXYZ के क्षेत्रफल का आधा है। चित्र से खाने गिनकर इसकी जाँच कीजिए। (त्रिभुज के घेरे मे वर्गों की गणना हेतु वर्ग का जो भाग आधा या अधिक आता है उसे एक पूर्ण वर्ग के रूप में गणना की जाती है तथा आधे से कम भाग वाले घिरे वर्ग की गणना नहीं की जाती है।)

अत: ΔNWXका क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times WX \times YX$

$= \frac{1}{2} \times (WX \times MN)$

$= \frac{1}{2}$ × आधा × ऊँचाई

अत:

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ **× आधार × संगत ऊँचाई**

2. त्रिभुज का आधार = $\frac{2 \text{ x त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{संगत ऊँचाई}}$

3. त्रिभुज की ऊँचाई = $\frac{2 \text{ x त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{संगत आधार}}$

:टिप्पणी : त्रिभुज की ऊँचाई आधार के संगत होती है। आधार त्रिभुज की भुजा होती है और संगत ऊँचाई उस आधार पर सम्मुख शीर्ष से डाले गये लम्ब के बराबर होती है।

उदाहरण 9: एक त्रिभुज का आधार 5 सेमी और संगत ऊँचाई 6 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुज का आधार=5 सेमी

त्रिभुज की संगत ऊँचाई =6 सेमी

अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}$x आधारसं××गत ऊँचाई

= $\frac{1}{2}$x 5 x 6 सेमी^{2}

= 15 सेमी^{2}

उदाहरण 10: एक त्रिभुज का क्षेत्रफल45 वर्ग सेमी और आधार 15 सेमी है। इस त्रिभुज की संगत ऊँचाई ज्ञात

कीजिए।

हल : त्रिभुज का क्षेत्रफल=45 सेमी^{2}

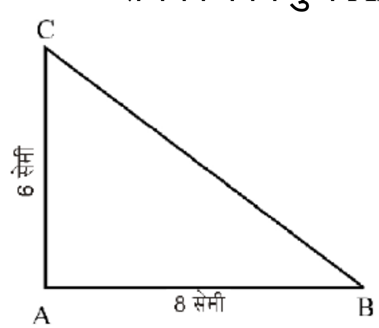
त्रिभुज का आधार =15सेमी^{2}

त्रिभुज की ऊँचाई= $\frac{2 \text{ x क्षेत्रफल}}{\text{संगत आधार}}$

= $\frac{2 \times 45 \text{ सेमी}^2}{15 \text{ सेमी}}$

= 6सेमी

उदाहरण 11: आकृति 12.20बने समकोण त्रिभुजABC मेंAB=8 सेमी और AC=6 सेमी। समकोण त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति12.20

हल : ΔABCमें $\angle A = 90^0$

अत: भुजा ACही त्रिभुज की ऊँचाई है।

आधार =8सेमी, ऊँचाई=6 सेमी

अत: ΔABC का क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}$ x (आधार × ऊँचाई)

= $\frac{1}{2}$ x 8 x 6 सेमी^{2}

= 24 सेमी^{2}

अभ्यास 12 (*d*)

1.निम्नांकित सारिणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

क्रम संख्या	त्रिभुज का आधार	त्रिभुज की ऊँचाई	त्रिभुज का क्षेत्रफल
1.	4.2 सेमी	2.1 सेमी	......
2.	10 सेमी	8 सेमी	......
3.	6.4 सेमी	....	12.8 सेमी^{2}
4.	12 सेमी	....	36 सेमी^{2}
5.	......	4 सेमी	12 सेमी^{2}
6.	.....	10.5 सेमी	42 सेमी^{2}
7.	x सेमी	$2x$ सेमी	....

2.एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 48सेमी^{2} है। यदि उसकी ऊँचाई 8 सेमी हो, तो त्रिभुज का आधार बताइए।

3.एक त्रिभुज का आधार 5 सेमी है। यदि त्रिभुज की ऊँचाई, आधार से दुगुनी है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4.निम्नांकित त्रिभुजों के क्षेत्रफल वर्गमी:र में ज्ञात कीजिए, जबकि उनके आधार और संगत ऊँचाई ज्ञात हैं:

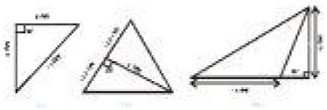
(i) आधार =15 सेमी, ऊँचाई=8 सेमी

(ii) आधार =7.5 सेमी,ऊँचाई =4 सेमी

(iii) आधार=1.5मी,ऊँचाई =0.8 मी

(iv) आधार =32 सेमी, ऊँचाई=105 सेमी

5. निम्नांकित त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



आकृति 12.21

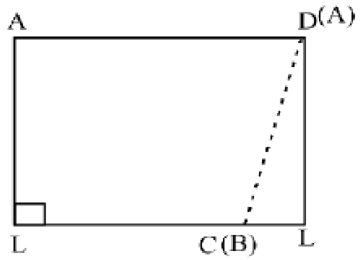
12.6 समान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल :

इन्हें देखिए :

क्रियाकलाप : दफ्ती के टुकड़े पर एक समान्तर चतुर्भुज ABLD बनाइए। उसके एक शीर्ष A से भुजा BC पर लम्ब AL डालिए। इस प्रकार समकोण त्रिभुज ALB बनेगा। (देखिए आकृति 12.22)। त्रिभुज ALB को काट लीजिए।

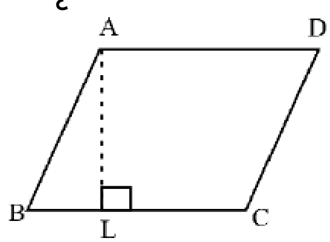
ΔALBका समान्तर चतुर्भुज के बचे टुकड़े से इस प्रकार जोड़िए कि भुजा ALभुजा DL से मिले। इस प्रकार आयत ALLD बनाइए। (देखिए आकृति 12.23)

क्या आकृति 12.22 में प्रर्दिशत समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल आकृति 12.23 में प्रर्दिशत आयत के क्षेत्रफल के बराबर है?



चित्र (2)

आकृति12.22



चित्र (1)

आकृति 12.23

हमने देखा कि दिये गये समान्तर चतुर्भुज ABCD से ही आयत ALLD बना है। इसलिए ये दोनों क्षेत्रफल में समान होंगे।

अत: समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल= आयत ALLD का क्षेत्रफल =लम्बाई C चौड़ाई

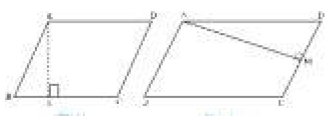
= AD$\times$ AL

= BC× AL (AD = BC)

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल =समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा उस भुजा पर सम्मुख शीर्ष से डाला गया लम्ब

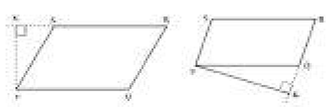
इन्हें भी देखिए :

नीचे दी गयी आकृतियों में समान्तर चतुर्भुज ABCD के शीर्ष A से भुजाBCऔर भुजा CDपर क्रमश:ALऔर AMलम्ब खींचे गये हैं।



ाकृति 12.24

नीचे दी गयी आकृतियों में समान्तर चतुर्भुज PQRS के बिन्दु P से भुजा SR पर PN और भुजा RQपर PK लम्ब डाले गये हैं जो क्रमश: RS के बढ़े हुए भाग के बिन्दु N पर और RQ के बढ़े हुए भाग के बिन्दु ख् पर मिलते हैं।



चित्र – 5 **चित्र – 6**

आकृति 5.28

हमने देखा कि शीर्ष लम्ब डालने के लिए कभी-कभी सम्मुख भुजा को बढ़ाना पड़ता है।

समान्तर चतुर्भुज की जिस भुजा पर लम्ब डाला जाता है उसे आधार कहते हैं और आधार पर डाले गये लम्ब को उसकी संगत ऊँचाई कहते हैं।

आकृति 12.24 (i) में BC आधार औरAL संगत ऊँचाई है।

आकृति 12.24 (ii) में आधार CD औरAMसंगत ऊँचाई है।

आकृति 12.25 (i)में आधार PQ और PN संगत ऊँचाई है।

आकृति 12.25 (ii) में आधार QR और PK संगत ऊँचाई है।

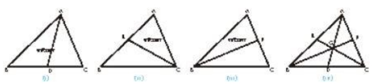
समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल= आधार ×ऊँचाई

समान्तर चतुर्भुज का आधार= $\frac{\text{समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई= $\frac{\text{समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

उदाहरण 12: आकृति (i) और (ii) में समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

=



(i) आकृति5.29 (ii)

हल : समान्तर चतुर्भुज (i) का क्षेत्रफल=आधार× ऊँचाई

=15 सेमी × 8 सेमी

= 120सेमी^{2}

समान्तर चतुर्भुज (ii) का क्षेत्रफल=आधार× ऊँचाई

=15 सेमी × 12सेमी

= 180सेमी^{2}

उदाहरण 13: एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 32सेमी^{2} है और उसके आधार की माप8सेमी है। समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल =32 सेमी^{2}

समान्तर चतुर्भुज का आधार =8सेमी

प्रश्नमें समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी (ऊँचाई) ज्ञात करनी है।

ऊँचाई = $\frac{\text{समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

= $\frac{32 \text{ सेमी}^2}{8\text{सेमी}}$

= 4 सेमी

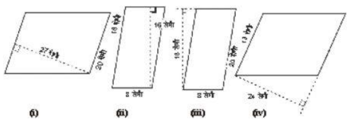
अत: समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई अर्थात् समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी =4सेमी

अभ्यास12 (e)

1. निम्नांकित सारिणी में दिये गये मापों से प्रत्येक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आधार	8 सेमी	2.8 सेमी	12 मिमी	6.5 सेमी	1 मी 5 सेमी	4.2 डेसीमी
ऊंचाई	3 सेमी	5 सेमी	8.7 सेमी	4.8 सेमी	45 सेमी	25 सेमी

2. निम्नांकित समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

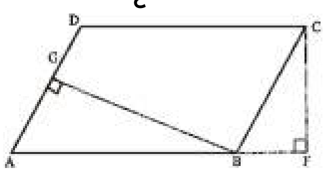


आकृति 12.27

3. उस समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 2.25 मी^{2} और आधार25 डेसीमी है।

4. एक खेत समान्तर चतुर्भुज के आकार का है। इसका आधार 15 डेकामी और ऊँचाई 8 डेकामी है।50 पैसा प्रति वर्गमीटर की दर से सिंचाई कराने का खर्च ज्ञात कीजिए।

5. आकृति 12.28 में ABCD समान्तर चतुर्भुज है।



आकृति 12.28

CF⊥ AB औरBG ⊥ AD है।

(i) यदि AB=16 सेमी, AD=12 सेमी और CF=10 सेमी तोBG ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि AD=10 सेमी, BG=8 सेमी और CF= 12 सेमी तोABज्ञात कीजिए।

12.7 समचतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल :

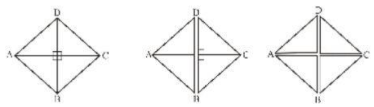
हम जानते हैं कि

(i) समचतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(ii) समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

क्या समचतुर्भुज में विकर्णों द्वारा बने चारों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं?

एक कागज पर समचतुर्भुज बनाइए उसके दोनों विकर्णों को खींचिए। समचतुर्भुज को काटकर अलग कीजिए। इसे आकृति 5.32 में दिखाया गया है।



(i) (ii) (iii)

आकृति 12.29

अब इसकी विकर्ण BD तथा AC पर मोड़िए। मोड़ के सहारे कैंची से काटकर विकर्णों से बने त्रिभुजों को अलग कीजिए। क्या चारों त्रिभुज एक दूसरे को ढँक लेते हैं?

हमने देखा चारों त्रिभुज एक दूसरे को पूरा-पूरा ढँक लेते हैं। अत:

समचतुर्भुज में विकर्णों द्वारा बने चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

अत:

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल =4× विकर्णों द्वारा काटने पर बने एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

इन्हें देखिए :

आकृति 12.30 समचतुर्भुज PQRS देखिए। PR और QS समचतुर्भुज PQRS के विकर्ण हैं, जो एक दूसरे को बिन्दु 0 पर समद्विभाजित करते हैं दोनों विकर्ण सम चतुर्भुज को चार सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँट रहे हैं।

समचतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल= 4× ΔSOR का क्षेत्रफल

$= 4 \times \frac{1}{2} \times OR \times OS$

$= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} PR \times \frac{1}{2} \times SQ$

$= \frac{1}{2} \times PR \times SQ$

$= \frac{1}{2}$ विकर्ण PR × विकर्णSQ

अत:

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल

उदाहरण 14: एक समचतुर्भुज के विकर्णों की लम्बाई 10 सेमी और 7सेमी है। समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ एक विकर्ण=10 सेमी

दूसरा विकर्ण =7सेमी

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल

= $\frac{1}{2}$ 10सेमी × 7 सेमी

= 35 सेमी^{2}

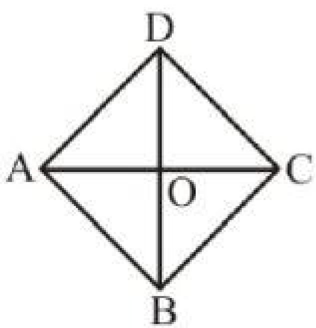
अभ्यास 12 (f)

1. नीचे सारिणी में समचतुर्भुज से सम्बन्धित नापें दी हुई हैं। अपनी अभ्यास पुस्तिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

क्रम संख्या	पहला विकर्ण	दूसरा विकर्ण	क्षेत्रफल
1.	8 सेमी	10 सेमी	.....
2.	12 सेमी	......	240 सेमी^{2}
3.	.....	3 सेमी	9 सेमी^{2}
4.	8.4 सेमी	6 सेमी	......

2. आकृति 12.31 समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 24 वर्ग सेमी और OD=3 सेमी। ज्ञात कीजिए :

(i) विकर्ण BD की लम्बाई

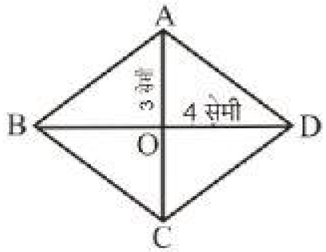


आकृति12.31

(ii) विकर्ण की लम्बाई

3. नीलिमा के समचतुर्भुजाकार प्लाट का क्षेत्रफल 80 वर्गमीटर है। यदि इसके एक विकर्ण की लम्बाई 16मीटर है, तो इसके दूसरे विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

4. आकृति 12.32 चित्र में दी गई नापों के आधार पर समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

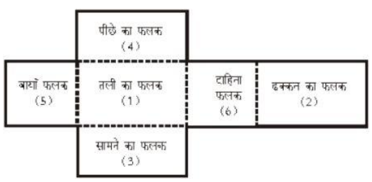


आकृति 12.32

12.8 घन एवं घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ :

इन्हें कीजिए :

एक माचिस की डिबिया लीजिए। इसे ऊपर से खोल दीजिए। आकृति 12.33 में इसके सभी 6 फलक दिखाए गये हैं।



आकृति12.33

स्पष्ट है कि तली का फलक (1) ढक्कन का फलक (2) के सर्वांगसम हैं। इसी प्रकार सामने का फलक (3), पीछे के फलक (4) के सर्वांगसम हैं और बायाँ फलक (5), दायें फलक (6) के सर्वांगसम हैं।

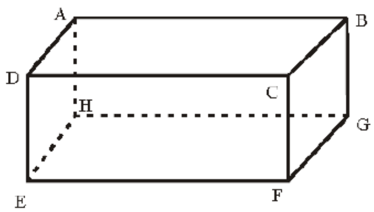
प्रयास कीजिए :

एक चाक के डिब्बे को खोलिए तथा स्पष्ट कीजिए कि इसमें छ: आयताकार फलक हैं।

दियासलाई या चाक के डिब्बे में कुल छ: फलक होते हैं। इन सभी फलकों के क्षेत्रफलों के योग को इनका सम्पूर्णपृष्ठ कहते हैं।

12.8.1. घनाभ :

आकृति12.34 चित्र को देखिए। यह एक घनाभ कीr आकृति है। किसी तल पर ठोस आकृति को बनाना संभव नहीं है परन्तु हम उसकी आकृति का आभासी चित्र बनाकर संबंधित भागों को दर्शा सकते हैं।



आकृति12.34

इस प्रकार हम देखते हैं कि घनाभ में -

(i) आठ शीर्ष होते हैं

(ii) बारह कोरें होती हैं।

(iii) छ: फलकें होती हैं, प्रत्येक फलक आयताकार होती है।

(iv) ऊपरी फलक और निचला फलक (Bottom Face) सम्मुख फलकों का एक जोड़ा है।

(v) बायें और दायें वाले फलक सम्मुख फलकों का दूसरा जोड़ा है।

(vi) सामने और पीछे का फलक सम्मुख फलकों का तीसरा जोड़ा है।

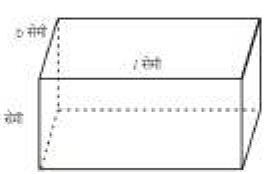
चित्र में ABCD ऊपरी फलक और EFGH निचला फलक है।

ADEH और CBGF क्रमश: बायें और दायें के फलक हैं।

ABGH और DCFE क्रमश: पीछे और सामने के फलक हैं।

12.8.2 घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ :

हमने देखा है कि बाजार में बहुत सी वस्तुएँ टिन के चद्दर, दफ्ती के बाक्सों या मोटे कागजों के बाक्सों में पैक करके बेची जाती है। इनमें बहुत सी पैंकिंग घनाभ के आकार की होती है। स्टील के बक्से, आलमारी आदि वस्तुएँ भी घनाभ के आकार की होती है। निर्माता के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि वह यह जाने कि इन वस्तुओं के निर्माण के लिए कितनी टिन का चद्दर, दफ्ती, मोटा कागज आदि लगेंगे। इसे जानने के लिए हमें सम्पूर्णपृष्ठ ज्ञात करना आवश्यक होता है।



आकृति 12.35

इन्हें देखिए :

निम्नांकित घनाभ को देखिए। घनाभ की लम्बाई l सेमी, चौड़ाई b सेमी और ऊँचाई h सेमी है। इस घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हम जानते हैं कि घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ उसके सभी छह फलकों के क्षेत्रफल के योगफल के बराबर होता है

अत: ऊपरी और निचले फलकों के क्षेत्रफलों का योग= $(l \times b + l\, b)$ सेमी^{2}

$= 2lb$सेमी^{2}

बायें और दायें फलकों के क्षेत्रफलों का योगफल $= (b \times h + b \times \text{h})$ सेमी^{2}

$= 2bh$ सेमी^{2}

सामने और पीछे वाले फलकों के क्षेत्रफलों का योग $= (h \times l + h \times l)$ सेमी^{2}

$= 2hl$ सेमी^{2}

घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ=घनाभ के सभी फलकों का योग

$= 2(lb + bh + hl)$ सेमी^{2}

अत:

घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ ==2 (लम्बाई × चौड़ाई +चौड़ाई × ऊँचाई +लम्बाई × ऊँचाई)= $2(lb + bh + hl)$

उदाहरण 15 : उस घनाभ का संपूर्णपृष्ठ ज्ञात कीजिए, जिसकी लम्बाई 10 सेमी, चौड़ाई 8 सेमी और ऊँचाई 5सेमी हो।

हल : दिया है कि l=10 सेमी,b=8सेमी, h= 5सेमी

अत: घनाभ का संपूर्ण प=ष्ठ $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2(10 \times 8 + 8 \times 5 + 10 \times 5)$ सेमी^{2}

$= 2(80 + 40 + 50)$सेमी^{2}

$= 340$ सेमी^{2}

उदाहरण 16 : एक घनाभ के आकार के टिन के डिब्बे की नाप50 सेमी ×40 सेमी ×30 सेमी है। इस प्रकार के बीस डिब्बे बनवाने के लिए कितने रुपये की टिन की चद्दर

क्रय करनी होगी, यदि वर्ग मीटर टिन के चद्दर का मूल्य 100 है।

हल : दिया है कि l = 50 सेमी, b = 40 सेमी^{2}, h = 30सेमी

अत: एक डिब्बे का संपूर्णपृष्ठ = $2(lb + b\text{h} + hl)$ सेमी^{2}

= 2(50 × 40 + 40 × 30 + 30 × 50) सेमी^{2}

= 9400 सेमी^{2}

∴ 20 डिब्बों का संपूर्ण पृष्ठ= 20 × 940सेमी^{2}

= 188000 सेमी^{2}

= 18.8 मी^{2}

∴ 18.8 वर्गमीटर टिन का मूल्य (100 प्रति वर्ग मीटर की दर से)

= 18.8 × 100

= 1880

अभीष्ट मूल्य =1880

कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल :

यदि किसी कमरे की लम्बाई a, चौड़ाई bऔर ऊँचाई c हो, तो सरलता से देखा जा सकता है कि चारों दीवारों का क्षेत्रफल =2lh + 2bh = 2h(l+b)

कमरे के चारों दीवारों का क्षेत्रफल = $2(l + b)\ h$ = 2 (लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

उदाहरण 17 : एक कक्षा-कक्ष की लम्बाई11 मीटर, चौड़ाई 8 मीटर और ऊँचाई 5 मीटर है। कक्षा-कक्ष की चारों दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : कक्षा-कक्ष की लम्बाई l = 11 मीटर, चौड़ाई b = 8 मीटर, ऊँचाई h = 5 मीटर

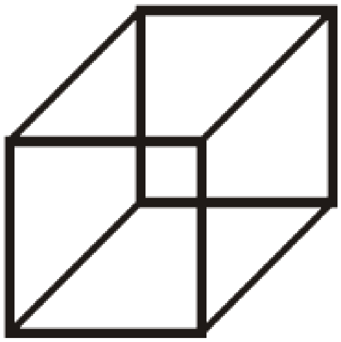
चारों दीवारों का क्षेत्रफल= 2 (लम्बाई + चौड़ाई) x ऊँचाई

= 2 x (11 + 8) x 5 मी^{2}

= 10 × 19 मी^{2}

= 190 मी^{2}

12.8.3. घन का संपूर्णपृष्ठ :



आकृति 12.36

इन्हें देखिए :

यह घन की आकृति है। घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई समान होने पर वह घन बन जाता है।

इसमें भी छ: फलक हैं। सभी फलक वर्गाकार हैं। सभी फलक क्षेत्रफल में समान हैं।

मान लिया घन की एक भुजा 'a' है।

एक फलक का क्षेत्रफल=भुजा^{2} = a^2

घन का सम्पूर्णपृष्ठ =6 ×फलक का क्षेत्रफल = $6a^2$

अत:

घन का सम्पूर्णपृष्ठ =6× भुजा^{2} = $6a^2$

उदाहरण 18: घन के प्रत्येक कोर की लंबाई 4 सेमी है, तो उस घन के सम्पूर्णपृष्ठ का क्षेत्रफल निकालिए।

हल : दिया है भुजा a =4 सेमी

घन के सम्पूर्णपृष् ठ का क्षेत्रफल $=6a^2$

$= 6 \times 4 \times 4$

=96 वर्ग सेमी

अभ्यास 12 (g)

1. निम्नांकित सारणी में घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई दी गई है। प्रत्येक घनाभ की सम्पूर्णपृष्ठ ज्ञात कीजिए।

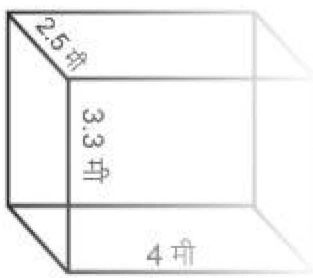
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)
l	5 सेमी	6 सेमी	10सेमी	4सेमी	$5_{1/2}$ सेमी	16सेमी
b	4 सेमी	3 सेमी	8 सेमी	1.7सेमी	4 सेमी	8 सेमी
h	3 सेमी	2सेमी	5 सेमी	2.3 सेमी	$10_{1/2}$ सेमी	6 सेमी

2. नीचे दी गई भुजा की नाप वाले घन का सम्पूर्णपृष्ठ ज्ञात कीजिए।

(i) भुजा =18 सेमी (ii) भुजा =8.8 सेमी

(iii) भुजा =1.2 सेमी (iv) भुजा =110 सेमी

3. दिये गये घनाभ के कुलपृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति12.37

4. अभिषेक के कमरे की लम्बाई 4मीटर, चौड़ाई 3.5 मीटर और ऊँचाई 3 मीटर है। इस कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. एक घनाकार बक्से की एक भुजा की लम्बाई 1मीटर 30 सेमी है। बक्से का सम्पूर्ण ज्ञात कीजिए।

6. रहीम के कमरे की लम्बाई 3.5मीटर, चौड़ाई 3 मीटर, ऊँचाई 3 मीटर है। इसकी चारों दीवारों पर रु15 प्रति वर्ग मीटर की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

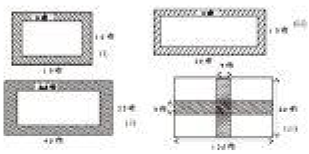
7. एक घनाकार डिब्बे की एक भुजा 10 सेमी है तथा एक अन्य घनाभ के आकार के डिब्बे की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमश: 12.5 सेमी, 10 सेमी तथा 8 सेमी है। किस डिब्बे का पाश्र्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है और कितना अधिक है ?

८. प्रदीप स्वीट स्टाल को मिठाइयाँ पैक करने के लिए गत्ते के घनाभ के आकार के 200 डिब्बे बनवाने हैं जिनकी लम्बाई 25 सेमी, चौड़ाई 20 सेमी तथा ऊँचाई 5 सेमी है।

यदि गत्ते का मूल्य ₹ 40 प्रति वर्ग मीटर है, तो डिब्बे बनवाने की कुल कीमत ज्ञात कीजिए।

दक्षता अभ्यास - 12

1. निम्नांकित आकृति5.41 में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



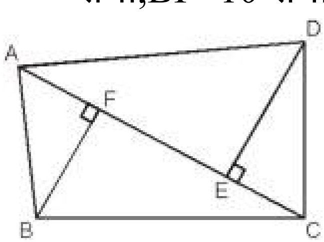
आकृति12.38

2.एक वर्गाकार पार्क की सीमा से लगा हुआ पार्क के अvदर चारों ओर 1 मीटर चौड़ाई का मार्ग है। पार्क की लम्बाई30 मीटर है। पार्क के शेष भाग में6प्रति वर्ग मीटर की दर से घास लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

3.उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिस का आधार 9.6 सेमी और ऊँचाई 5 सेमी है।

4.उस त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 45 सेमी^{2} है तथा आधार 15 सेमी है।

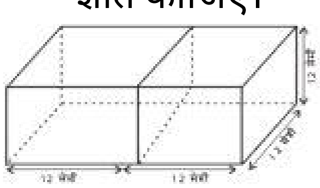
5.आकृति 12.39 चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसमें AC =48 सेमी,BF=10 सेमी और DE= 20 सेमी।



आकृति 12.39

6**.**उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार 7 सेमी और ऊँचाई 4.3सेमी हो।

7.12 सेमी भुजा के दो घन सटाकर रखे गये हैं। सटाकर रखने से बने घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.40

इस इकाई में हमने सीखा ?

1. आयत का परिमाप =2(लम्बाई + चौड़ाई)

2. आयत का क्षेत्रफल= लम्बाई × चौड़ाई

3. वर्ग का परिमाप= 4× एक भुजा

4. वर्ग का क्षेत्रफल =भुजा^{2}

5. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × संगत ऊँचाई

6.समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल =समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा × उस भुजा पर सम्मुख शीर्ष से डाला गया लंब

7.समचतुर्भुज में विकर्णों द्वारा बने चारों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

8.समचतुर्भुज का क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल

9.घनाभ के कुछ छ: फलक होते हैं। इन सभी फलकों के क्षेत्रफल के योग को इनका सम्पूर्णपृष्ठ कहते हैं।

10. यदि घनाभ की लम्बाई= l, चौड़ाई =b, और ऊँचाई=h हो तो घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ का क्षेत्रफल=2($lb + bh + hl$)

11. कमरे के चारों दीवारों का क्षेत्रफल= 2(लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

12. घन का सम्पूर्ण पृष्ठ = 6× भुजा^{2} =6a^2

भास्कराचार्य द्वितीय (सन् 1114 - सन् 1185)

भास्कराचार्य ने बीजगणित में शून्य के गणित की व्यापक विवेचना की। बीजगणित के

अन्तर्गत करणियों, सारणियों, सरल समीकरणों तथा वर्ग समीकरण पर वृहद् कार्य

किया। इनके अनुसार किसी ऋणात्मक राशि का वर्गमूल सम्भव है। लीलावती में इन्होंने

त्रिभुजों, चतुर्भुजों, वृत्तों के क्षेत्रफल तथा गोले के आयतन पर अभ्यास प्रश्न के साथ ℿ के
निकटतम मान पर भी विवेचना की। इनके द्वारा न्यूटन से पूर्व ज्योतिष में चलन गणित
का प्रयोग किया गया।

अभ्यास 12 (a)

1. (i) 18 सेमी, (ii) 40 मिमी, (iii) 23 मिमी, (iv) 14.4 मी; **2.** (i) 18 सेमी^{2}, (ii) 100 मिमी^{2}, (iii) 15 मी^{2}, (iv) 8 मी^{2}; **3.** (i) 4 मी, 18 मी (ii) 3मी, 22 मी, (iii) 4 सेमी, 20 सेमी^{2}, (iv)
210सेमी, 6300 सेमी^{2}, **4.** 30 एअर; **5.** 2.64हेक्टेयर; **6.** 40मी; **7.** 144 सेमी^{2}, 48सेमी; **8.** 750रुपये; **9.** 4725.0 रुपये

अभ्यास 12 (b)

1. 26 मी, 16 मी; **2.** 31 मी, 21 मी; **3.** (i) 200, (ii) 56, (iii) 144; **4.** 96 वर्गमी; **5.** 2500 वर्गमी

अभ्यास 12 (c)

1. (i) 425 मी^{2}, (ii) 206 मी^{2}; **2.** ` 450; **3.** 165 मी^{2}; **4.** 910 मी^{2}; **5.** (i) 72 मी^{2}, (ii) ₹ 3240 **6.** ₹ 10692.0; **7.**(i) 175 मीटर^2, 100 मीटर^2 , 25 मीटर^2

अभ्यास 12 (d)

1. (i) 4.41 सेमी^{2}, (ii) 40 सेमी^{2}, (iii) 4 सेमी, (iv) 6 सेमी, (v) 6सेमी, (vi) 8 सेमी, (vii) x^2 सेमी^{2}; **2.** 12सेमी; **3.** 25 सेमी^{2}; **4.** (i) 0.006 मी^{2}, (ii) 0.0015 मी^{2}, (iii) 0.6 मी^{2}, (iv) 0.168मी^{2}, **5.** (i) 24 सेमी^{2}, (ii) 100 सेमी^{2}, (iii) 75 सेमी^{2} **6.** 2400सेमी^{2}

अभ्यास12 (e)

1. (i) 24 सेमी^{2}, (ii) 14 सेमी^{2}, (iii) 10.44 सेमी^{2}, (iv) 31.20 सेमी^{2}, (v) 0.4725 मी^{2}, (vi) 0.105 मी^{2}; **2.** (i) 540 सेमी^{2}, (ii) 128 सेमी^{2}, (iii) 144 सेमी^{2}, (iv) 312 सेमी^{2} **3.** 90सेमी; **4.**12000 मी^{2},

` 60,000; **5.** (i) $13\frac{1}{3}$ सेमी; (ii) 15 सेमी

अभ्यास 12 (f)

1. (i) 40 सेमी^{2}, (ii) 40सेमी, (iii) 6 सेमी, (iv) 25.2 सेमी^{2}; **2.** (i) 6सेमी, (ii) 8सेमी; **3.** 10 मी;**4.** 24 सेमी^{2}**5.**30मी^{2}

अभ्यास 12 (g)

1. (i) 94 सेमी^{2}, (ii) 72 मी^{2}, (iii) 340 सेमी^{2}, (iv) 39.82 सेमी^{2}, (v) 243.5 सेमी^{2}, (vi) 544 सेमी^{2}, **2.** (i) 1944 सेमी^{2}, (ii) 464.64 सेमी^{2}, (iii) 8.64 सेमी^{2}, (iv) 72600 सेमी^{2}, **3.** 62.90मी^{2} **4.** 45 मी^{2}; **5.** 101400सेमी^{2}; **6.** ₹585 **7.**घनाभ के आकर के डिब्बे, 10सेमी^{2} **8.** ₹1160

दक्षता अभ्यास 12

1. (i) 84 मी^{2}, (ii) 124 मी^{2}, (iii) 300 मी^{2}, (iv) 975 मी^{2}; **2.** 4704; **3.** 24 सेमी^{2}; **4.** 6 सेमी; **5.** 720सेमी^{2}; **6.** 30.1 सेमी^{2}; **7.** 1440 सेमी^{2}

इकाई 13 मानसिक अभ्यास

B2ETIU

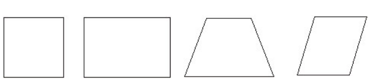
- **निर्धारित क्रम (pattern) को बढ़ाना**
- **रिक्त स्थान की संख्या ढूँढ़ना**
- **संख्या पहेली**

13.1 भूमिका

आप अपने आस-पास की वस्तुओं को देखें। घर से विद्यालय आते वक्त कुछ नियमों एवं अनुशासन का पालन करते हैं। यथा बायीं ओर चलना, वाहनों का एक क्रम में चलना, ट्रैफिक नियमों का पालन करना आदि। वनस्पति जगत में देखिए। किसी वृक्ष विशेष की समस्त पत्तियाँ एक ही आकार की होती हैं। पत्तियों एवं फूलों की पंखुड़ियों का एक निश्चित क्रम विन्यास होता है। ये एकल, युग्म, त्रिक, चार-चार, पाँच-पाँच, छह-छह, आठ-आठ आदि के गुच्छ के रूप में पाये जाते हैं। यद्यपि ये सार्वभौमिक सत्य आज से लाखों वर्ष पूर्व सृष्टि के संग ही अवरित हुए किन्तु इनकी सर्वप्रथम पहचान 13 वीं शती में लियोनार्डो फिबोनाकी (Leonardo Fibonacci) द्वारा करने का उल्लेख प्राप्त होता है।

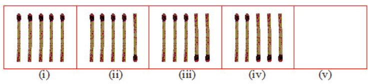
कुछ समतल और ठोस आकृतियों में भी एकरूपता पायी जाती है।

13.2 निर्धारित क्रम (पैटर्न)

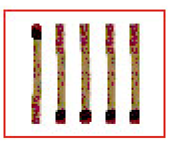


वर्ग आयत, समलम्ब और चतुर्भुज को देखिए। उपरोक्त आकृतियों में एक निर्धारित पैटर्न यह है कि यह सभी आकृतियाँ चार भुजाओं से निर्मित बंद आकृतियाँ हैं। यदि इसी क्रम को आगे बढ़ाया जाये तो अगली आकृति भी चार भुजाओं वाली समतलीय आकृति होगी।

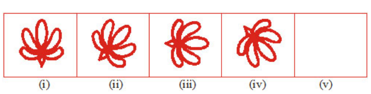
माचिस की तीलियों से बनी इन आकृतियों को देखिए -



(i) से लेकर (iv) तक की आकृतियों में माचिस की तीलियों का एक अनुक्रम बन रहा है। पहले खाने में पाँचों तीलियाँ सीधी हैं फिर अगले खाने में एक तीली उल्टी है तत्पश्चात दो तीलियाँ उल्टी हैं ..... इस प्रकार इसी अनुक्रम के अनुपालन में संख्या (v) वाले खाने में आने वाली आकृति को हम बना सकते हैं। अत: अन्तिम खाने में आने वाली आकृति होगी -



फूलों से बनी (i) से (iv) तक की आकृतियों को देखकर अगले खाने में आने वाली आकृति को हम ज्ञात कर सकते हैं।



निष्कर्ष

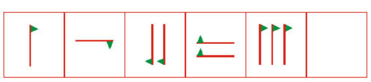
कोई भी आकृति या प्रारूप जो खुद को एक अनुमानित दिशा में दोहराता है वह एक पैटर्न है।

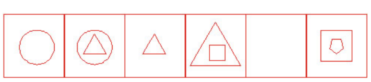
उदाहरण १ - दी गयी आकृतियाँ एक अनुक्रम का पालन करती हैं। उस अनुक्रम को ज्ञात कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

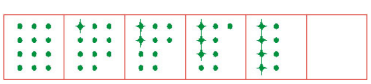
हल - पहले खाने में एक तीली दूसरे खाने में 2, तीसरे खाने में तीन तीली.... अत: पाँचवे खाने में 5 तीलियाँ होंगीं। अब तीली का शीर्ष और स्थिति को देखिए। पहले खाने से प्रारम्भ होकर तीली का शीर्ष दक्षिणावर्त दिशा की ओर घूम रहा है। तीली पहले खाने में ऊध्र्वाधर दिशा मे फिर अगले खाने में क्षैतिज दिशा में और फिर ऊध्र्वाधर दिशा और इसी प्रकार आगे भी अनुक्रम में है। अत: पाँचवें खाने की आकृति होगी।

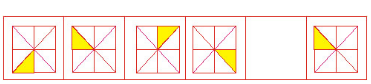
प्रयास कीजिए

निम्नलिखित आकृतियों को देखिए। यह आकृतियाँ एक अनुक्रम का अनुसरण कर रही हैं। उस अनुक्रम को ज्ञात कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।









13.3 संख्याओं का पैटर्न

निम्नलिखित संख्याओं के पैटर्न को देखिए

(i) 1,4,7,10,13,16,19,22

(संख्याएँ क्रम से 3 के अन्तर से बढ़ रही हैं अर्थात् संख्याओं में 3 का अन्तर है।)

(ii) –1, –3, –5, –7, –9, –11

(संख्याएँ क्रम से 2 के अन्तर से घट रही हैं अर्थात् संख्याओं में 2 का अन्तर है।)

(iii) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

(संख्याएँ क्रमश: 1, 2, 3, ... का वर्ग है)

(iv) 1, 8, 27, 64, 125, 216

(संख्याएँ क्रमश: 1, 2, 3, 4, 5, 6 का घन है)

उपर्युक्त संख्याएँ एक निर्धारित पैटर्न का अनुसरण कर रही हैं।

13.3 रिक्त स्थान की संख्या ढूँढना

निम्न अनुक्रमों पर विचार कीजिए

(i) 2, 4, 6, 8, 10, ...20

(ii) 15, 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6, ...

(iii) 1, 4, 9, 16, ...

(iv) 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

(v) 1, -1/2 ,1/4 ,-1/8 , ...-1/128,

उपर्युक्त के निरीक्षण से निम्नलिखित तथ्य क्रमश: ज्ञात होते हैं।

(i) प्रत्येक अगला पद पूर्व पद में '2' का योग करके प्राप्त होता है।

(ii) प्रत्येक अगला पद पूर्व पद में से 3 घटाने पर प्राप्त होता है।

(iii) इस अनुक्रम में प्रत्येक संख्या प्राकृतिक संख्याओं का वर्ग है।

(iv) यह अभाज्य संख्याओं का अनुक्रम है।

(v) इस अनुक्रम में प्रत्येक अगला पद, पूर्व पद को (-1/2) से गुणा करने पर प्राप्त होता है।

ध्यान दें -

अनुक्रम (i) तथा (v) परिमित अनुक्रम हैं क्योंकि उसमे पदों की संख्या सीमित है, जबकि अन्य अनुक्रम अपरिमित अनुक्रम हैं।

संख्याओं के समूह को जब एक ऐसे निश्चित क्रम में व्यवस्थित किया जाता है कि उसकी प्रथम संख्या, द्वितीय संख्या, तृतीय संख्या को पहचाना जा सके और आगे की संख्या को ज्ञात किया जा सके, तो संख्याओं के समुदाय को अनुक्रम कहते हैं।

प्रयास कीजिए -

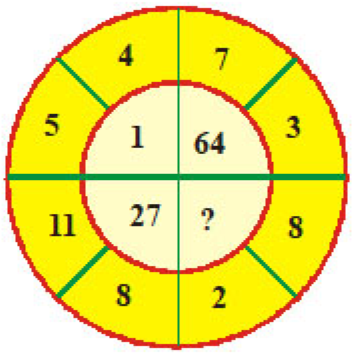
निम्नलिखित संख्याओं का समूह एक अनुक्रम बना रहा है। उस अनुक्रम को ज्ञात कर रिक्त स्थान में आने वाली संख्या ज्ञात कीजिए।

(i) -3, -5, -7, ..., -11

(ii) 4, 2, 1, ..., 1/4

(iii) 1, 8, 27, 64, ...

उदाहरण 2 **-**रिक्त स्थान की संख्या ज्ञात कीजिए।



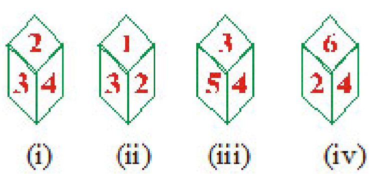
हल - चित्र में दो वृत्त हैं। बाह्य वृत्त को चार भागों में बाँटा गया है। प्रत्येक चौथाई भाग में संख्याओं के अन्तर का घन उसी भाग के आन्तरिक वृत्त की संख्या है।

$(5\text{-}4)^3 = 1$, $(7\text{-}3)^3 = 64$, $(11\text{-}8)^3=27$,

अत: रिक्त स्थान पर संख्या $(8\text{-}2)^3 =216$ आयेगी।

13.4 संख्या पहेली

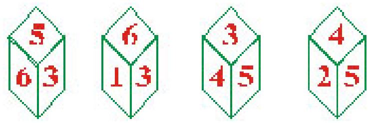
उदाहरण 3 **:**एक पांसे को चार बार फेंका गया और चारों स्थितियों को चित्र में दर्शाया गया है। संख्या 2 के विपरीत तल पर कौन सी संख्या अंकित है। ज्ञात कीजिए।



हल - यहाँ संख्या 2 पाँसे की स्थितियों (i), (ii) और (iv) में दिखायी दे रही है। पाँसे पर 1 से 6 तक अंक होते हैं और संख्याएँ 3, 4, 1 और 6 संख्या 2 के आसन्न (adjacent) है। अत: इनमें से कोई भी संख्या 2 के विपरीत तल पर नहीं हो सकती। अत: केवल संख्या 5 ही 2 के विपरीत तल पर होगी।

प्रयास कीजिए -

एक पांसे को 4 बार फेंका गया जिसकी विभिन्न स्थितियाँ संलग्न चित्र में दी गयी है। संख्या 6 के विपरीत तल पर कौन सी संख्या अंकित है ?



उत्तर · 4

क्रियाकलाप १

आइये संख्याओं से एक मनोरंजक खेल खेलते हैं।

259 X 39 X आपकी उम्र = ?

देखिए गुणनफल में आपकी उम्र तीन बार लिखी मिलेगी

यथा 259 X 39 X 16 = 161616

स्पष्टीकरण -

यदि संख्या 259 में 39 का गुणा करेंगे तो गुणनफल 10101 प्राप्त होगा। अब प्राप्त गुणनफल में यदि संख्या 16 से पुन: गुणा करें तो गुणनफल 161616 प्राप्त होगा। इस प्रकार प्राप्त गुणनफल में संख्या 16 की तीन बार पुनरावृत्ति हो रही है।

क्रियाकलाप - २

यह गणना बतायेगी कि आपका अध्ययन हेतु कौन सा विषय सर्वाधिक पसन्द है। 1 से 9 तक के अंकों में से कोई भी एक अंक चुनिए। अब उसमें 3 से गुणा कीजिए। प्राप्त गुणनफल में ३ जोडिए। अब पुन: 3 से गुणा कीजिए। आपको 2 अंकों की संख्या प्राप्त होगी। प्राप्त संख्या के दोनों अंकों को जोड़िए। प्राप्त संख्या बतायेगी कि आपको कौन सा विषय सर्वाधिक पसन्द है।

1. हिन्दी 2. अंग्रेजी 3. कला

4. शिल्प 5. जीव विज्ञान 6. भौतिक विज्ञान

7. रसायन विज्ञान 8. सामान्य अध्ययन 9. गणित

विशेष -

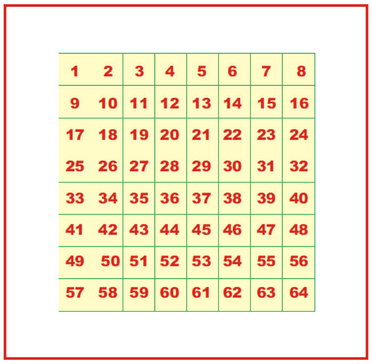
1 से 9 तक की किसी भी संख्या का चयन करें प्रत्येक दशा में उत्तर 9 ही प्राप्त होगा।

क्रियाकलाप ३

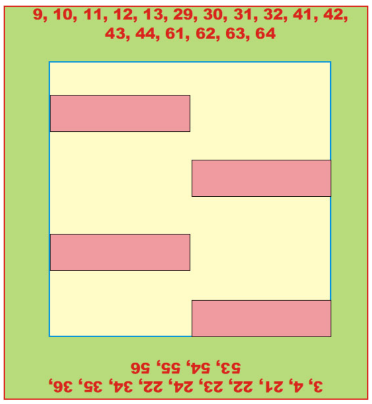
एक सादे चार्ट पेपर पर आकृति 1 के अनुसार 64 वर्गाकार खाने बनाकर क्रमश: 1 से 64 तक संख्याएँ लिख लें। किसी एक छात्र से इनमें से कोई एक संख्या सोचने को कहें। अब संलग्न आकृतियों 2 से 7 के अनुसार 6 पृष्ठ लेकर जिससे ऊपर और नीचे की ओर संख्याएँ लिखी हैं को क्रम से दिखाकर बच्चों से पूछे कि किस पृष्ठ पर उनकी सोची हुई संख्या लिखी है। जिस पृष्ठ पर अंकित संख्याएँ छात्र की सोची हुई संख्या से मिलती हो उसे उसी क्रम में वर्गाकार खाने वाले चार्ट पर संख्याओं की सीध में क्रम से रखते जाएँ और जिस पृष्ठ पर अंकित संख्याएँ छात्र की सोची हुई संख्या से मेल न खाये उसे अलग रख दें। आप देखेंगे कि वर्गाकार खाने वाले चार्ट पेपर पर अन्त में वही संख्या दिखायी पड़ेगी जो कि छात्र ने सोची थी।

(1) चार्ट पेपर पर बने वर्गाकार खाने की माप शेष पृष्ठों पर बनी माप के बराबर हो।

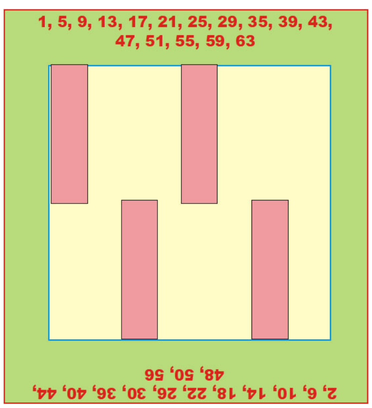
(2) 2 से 6 तक बने पृष्ठों पर कटे (गुलाबी) हुए भाग की माप आकृति 2 से 7 तक बनी आकृति के भाग के समरूप होनी चाहिए।



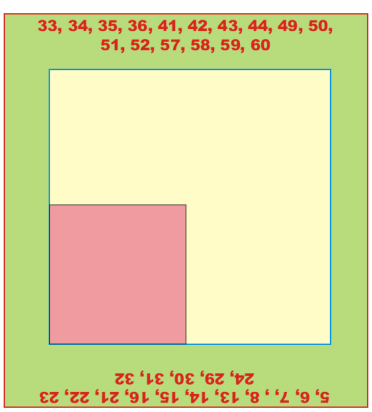
आकृति 1



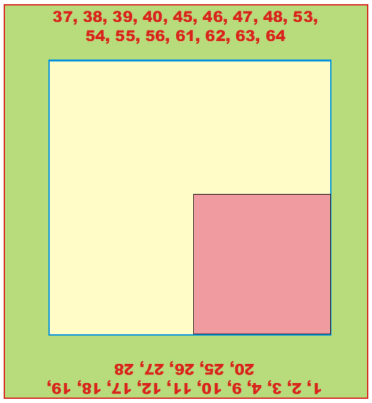
आकृति 2



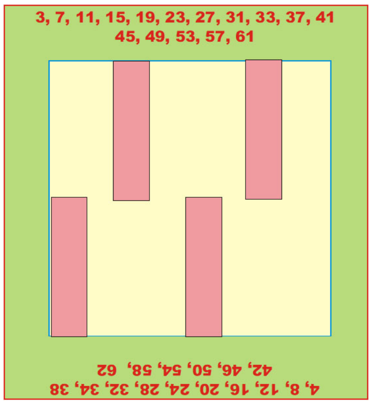
आकृति 3



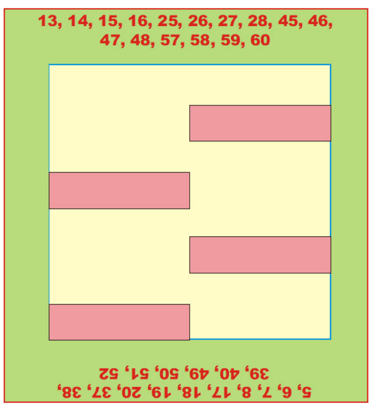
आकृति 4



आकृति 5



आकृति 6



आकृति 7

इस इकाई में हमने सीखा

1. निर्धारित क्रम अथवा पैटर्न के विषय में जानकारी प्राप्त की।
2. अनुक्रम अथवा पैटर्न के माध्यम से सम्बन्धित आकृति और संख्याओं के अमूर्त चिन्तन को मूर्त रूप में परिणित करना।
3. संख्या पहेली के माध्यम से तर्वâ शक्ति और निदानात्मक प्रवृत्ति का विकास।

सामूहिक चर्चा

महावीराचार्य (850 ई) ने गुणनक्रिया के कुछ ऐसे उदाहरण दिये हैं। जिनमें गुणनफल की संख्या का अंक बाएँ से दाएँ या दाएँ से बाएँ पढ़ने पर एक से रहते हैं।
गणितसार संग्रह में इन मनोहर संख्याओं के उदाहरण हैं -

12345679 X 9 =111,111,111
12345679 X18 = 222,222,222
12345679 X 27 = 333,333,333
12345679 X 36 = 444,444,444

333333666667 X33 =11000011000011
14287143 X7 =100010001

111111111 X 111111111 = 12345678987654321

अभ्यास १३

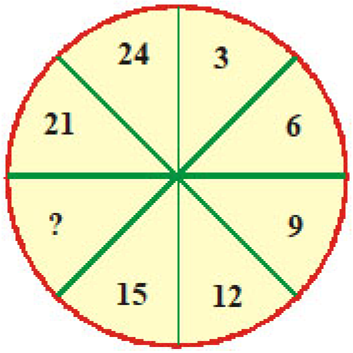
रिक्त स्थान की पूर्ति हेतु दिए गये विकल्पों में से उसे चुनिए जो अनुक्रम को पूरा करें -

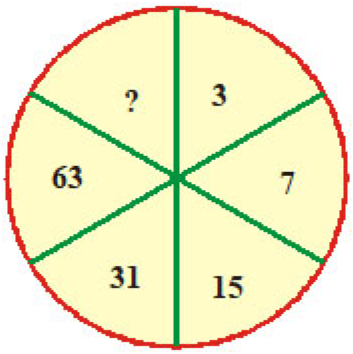
1. ABE, BCF, CDG, ? , EFI
(a) CDH (b) EFH (c) DEG (d) DEH

2. 2, 6, 12, 20, 30, 42,
(a) 50 (b) 52 (c) 54 (d) 56

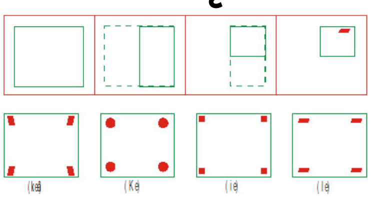
3. 14, 15, 32, 99,
(a) 300 (b) 350 (c) 400 (d) 450

4. 4, 9, 16, 25,
(a) 36 (b) 45 (c) 49 (d) 50

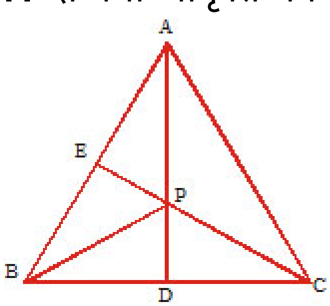
5. (a). 

(b). 

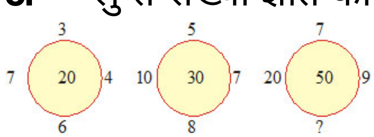
6. प्रश्न आकृतियों में दिखाए अनुसार कागज को मोड़ने, काटने, तथा खोलने के बाद वह किस उत्तर आकृति जैसा दिखाई देगा ?



7. दी गयी आकृति में त्रिभुजों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।



8. लुप्त संख्या ज्ञात कीजिए।



उत्तरमाला

अभ्यास 13

1. (d) DEH ; **2.** (d) 56; 3. (c) 400; **4.** (a) 36; **5.** (a) 18, (b) 127; **6.** (d) ;
7. 12; **8.** 14

परिशिष्ट : भारतीय प्राचीन गणितीय पद्धति

- ❖ गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त, वर्ग सूत्र एक न्यूनेन पूर्वण, एकाधिकेन पूर्वेण, वर्गमूल विलोकनम्
- ❖ भाग-निखिलम् (आधार 10, 100) भाग के बीजांक से जाँच
- ❖ भाग परावर्त्य (आधार 10, 100) बीजांक से जाच
- ❖ भाग - ध्वजांक विधि (भाजक दो अंकों का ध्वजांक 5 या 5 से छोटा हो)
- ❖ भाग - ध्वजांक विधि (बीजांक से जाँच)
- ❖ घनसूत्र आनुप्येण, घनमूल विलोकनम्

B2NPKH

14.1 गणितज्ञ आर्यभट (प्रथम)

प्राचीन भारत के महान खगोलशास्त्री और गणितज्ञ आर्यभट का जन्म 476 ई. में हुआ था जिन्होंने 499 ई. में 23 वर्ष की आयु "आर्यभट्टीय" नामक एक अनुपम ग्रन्थ की रचना संस्कृत के श्लोकों में की। इस ग्रंथ में कुल 5 अध्याय हैं जिनमें से 4 अध्याय ज्योतिष पर तथा एक अध्याय गणित पर है। विश्व के ये प्रथम खगोलशास्त्री हैं, जिन्होंने बताया कि सूर्य स्थिर है और पृथ्वी उसका एक पूरा चक्कर 365 दिन, 5 घण्टे और 12 सेकेण्ड में लगाती है। यही सामान्य वर्ष की सम्पूर्ण अवधि है। सूर्य का चक्कर लगाते समय पृथ्वी अपनी धुरी पर घूमती रहती है जिसके कारण दिन और रात होते हैं। चन्द्रमा के पास स्वयं का प्रकाश नहीं है, वह सूर्य से प्रकाशित होकर ही प्रकाशमान होता है। सूर्य ग्रहण और चन्द्रग्रहण खगोलीय घटनाएँ हैं। गणित के क्षेत्र में उन्होंनें (π) का मान दशमलव के चार अंकों तक बिल्कुल सही ज्ञात किया। उन्होंने बताया कि 20000 इकाई व्यास वाले वृत्त की परिधि 62832 इकाई के बराबर होगी और

$$\pi = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{62832}{20000} = 3.1416$$

उन्होंने गणित के क्षेत्र में (π) के अतिरिक्त शून्य, ज्या और कोटिज्या की भी विवेचना की है। भारतीय गणित के इतिहास में उन्हें बीजगणित का संस्थापक मानते हैं तथा बीजगणित में उन्होंने श्रेणी का भी उल्लेख किया है। उन्होंने वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ ज्ञात किया, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है, जो सर्वमान्य है।

सर्वप्रथम आर्यभट्ट ने ही समान्तर श्रेणी $a + (a + d) + (a + 2d) + ...$ पदों तक

के योगफल के लिए सूत्र $S = n\left[a + \frac{(n-1)}{2}d\right]$

प्रस्थापित किया जो आज

Scanned with CamScanner

$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ के रूप में उल्लिखित होती है। (यहाँ a = प्रथम पद, d = सार्वअन्तर तथा n कुल पदों की संख्या है।)

भाग विधि से घनमूल ज्ञात करने का श्रेय भी आर्यभट्ट को ही है। यह कहना अतिशयोक्ति नहीं होगी कि आर्यभट्ट (प्रथम) गणित, विज्ञान ओर खगोलशास्त्र के जाज्वल्यमान नक्षत्र रहे हैं, जो आज भी अपनी प्रतिभा एवं वैज्ञानिक खोजों के लिए सबके आदरणीय बने हुए हैं। भारत सरकार ने इन्हीं को सम्मान प्रदान करते हुए इनके नाम पर अपना प्रथम उपग्रह ''आर्यभट्ट'' सोवियत संघ की भूमि से दिनांक 19 अप्रैल 1975 को अन्तरिक्ष में स्थापित किया। ये भविष्य में भी विश्व के विज्ञान एवं गणित वेत्ताओं के लिए प्रेरणा के श्रोत बने रहेंगे।

14.1.1 विनकुलम एवं उनके अनुप्रयोग

(पहाड़ा एवं मिश्रित गणना में)

(*a*) पहाड़ा

सामान्यतः 1 से 5 तक पहाड़ा लिखन सरल होता है किन्तु उन संख्याओं का पहाड़ा लिखना (जिनमें प्रयुक्त अंक 5 से बड़े होते हैं) कुछ कठिन होता है। ऐसी संख्याओं में यदि 5 से बड़े अंकों को विनकुलम में बदल दें तो पहाड़ा लिखना सरल हो जाता है। इसके प्रयोग से किसी भी संख्या का पहाड़ा लिख सकते हैं तथा दसवें स्तर से भी आगे के स्तरों पर भी लिख सकते हैं। निम्नांकित उदाहरण देखिए -

उदाहरण 1 : 789 का पहाड़ा लिखिए।

हल : 789 को विनकुलम संख्या के रूप में परिवर्तित करने पर

789 $=1\bar{2}\bar{1}\bar{1}$ (क्योंकि $1\bar{2}\bar{1}\bar{1}$ = 1000 - 200 - 10 - 1 = 789)

प्रथम स्तर	=	$1\bar{2}\bar{1}\bar{1}$	=	1000 − 211	=	789
द्वितीय स्तर	=	$2\bar{4}\bar{2}\bar{2}$	=	2000 − 422	=	1578
तृतीय स्तर	=	$3\bar{6}\bar{3}\bar{3}$	=	3000 − 633	=	2367
चतुर्थ स्तर	=	$4\bar{8}\bar{4}\bar{4}$	=	4000 − 844	=	3156
पंचम स्तर	=	$4\bar{0}\bar{5}\bar{5}$	=	4000 − 55	=	3945
छठा स्तर	=	$5\bar{2}\bar{6}\bar{6}$	=	5000 − 266	=	4734
सातवाँ स्तर	=	$6\bar{4}\bar{7}\bar{7}$	=	6000 − 477	=	5523
आठवाँ स्तर	=	$7\bar{6}\bar{8}\bar{8}$	=	7000 − 688	=	6312
नौवाँ स्तर	=	$8\bar{8}\bar{9}\bar{9}$	=	8000 − 899	=	7101
दसवाँ स्तर	=	$8\bar{1}\bar{1}\bar{0}$	=	8000 − 110	=	7890
ग्यारहवाँ स्तर	=	$9\bar{3}\bar{2}\bar{1}$	=	9000 − 321	=	8679

CS Scanned with CamScanner

(b) मिश्रित गणना में विनकुलम का अनुप्रयोग

द्रष्टव्य है कि यह आवश्यक नहीं है कि विनकुलम संख्या में सभी अंक 5 या 5 से न्यून हों। ये अंक 9 तक कोई भी हो सकते हैं। अब ऐसी विनकुलम संख्याओं का योग एवं घटना करना हम सीखेंगे जिनके अंक 1 से लेकर 9 तक हो सकते हैं :

उदाहरण 1 :

$$\begin{array}{r} 8\bar{3}\bar{7}6\bar{2} \\ +\ 3\bar{4}\bar{5}\bar{8}1 \\ \hline 11\bar{8}\bar{2}\bar{2}\bar{1} \\ \hline \end{array}$$

योगफल $11\bar{8}\bar{2}\bar{2}\bar{1}$ = 101779 उत्तर

ध्यान दें, सैकड़े के स्थान पर $\bar{7}$ और $\bar{5}$ का योग $\overline{12}$ आता है, अतः सैकड़े के स्थान $\bar{2}$ लिखते हैं एवं $\overline{12}$ के दहाई वाला अंक हजार वाले स्तम्भ में हासिल के रूप में ले जाते हैं, इसी कारण हजार वाले स्थान पर अंकों का योग $\bar{3} + \bar{4} + \bar{1} = \bar{8}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{r} 9\bar{8}\bar{6}5\bar{1} \\ -(7\bar{5}\bar{9}\bar{4}2) \\ \hline 2\bar{3}39\bar{3} \\ \hline \end{array}$$

$2\bar{3}39\bar{3}$ = 17387 उत्तर

उदाहरण 3 :

$$\begin{array}{r} 4\bar{6}\bar{7}2\bar{9} \\ +\ 5\bar{8}\bar{3}4\bar{2} \\ -\ (7\bar{5}\bar{6}\bar{8}\bar{7}) \\ +\ 9\bar{7}\bar{8}\bar{2}\bar{5} \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

हल : घटाने वाली संख्या को 'परावर्त्य योजयेत'' सूत्र का प्रयोग कर उपर्युक्त प्रश्न को निम्नवत् हल करेंगे।

$$\begin{array}{r} 4\bar{6}\bar{7}2\bar{9} \\ +\ 5\bar{8}\bar{3}4\bar{2} \\ +\ \bar{7}5687 \\ +\ 9\bar{7}\bar{8}\bar{2}\bar{5} \\ \hline 10\bar{7}\bar{1}2\bar{9} \\ \hline \end{array}$$

$10\bar{7}\bar{1}2\bar{9}$ = 92911 उत्तर

CS Scanned with CamScanner

उदाहरण 4 - निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए।

8936 − 7219 + 5673 + 4698 − 7522 + 3211

हल - विनकुलम का प्रयोग करने पर उपर्युक्त का मान =

$$
\begin{array}{r}
8\,9\,3\,6 \\
+\bar{7}\,\bar{2}\,\bar{1}\,\bar{9} \\
+5\,6\,7\,3 \\
+4\,6\,9\,8 \\
+\bar{7}\,\bar{5}\,\bar{2}\,\bar{2} \\
+3\,2\,1\,1 \\
\hline
7\,7\,7\,7 \\
\hline
\end{array}
$$

14.2 गुणा (निखिल विधि - आधार-उपाधार)

हम जानते हैं कि आधार 10 का कोई घात होता है, जैसे 10, 100, 1000, ...। उपाधार, आधार का कोई अपवर्तक होता है, जैसे 50 आधार 100का एक अपवर्तक है।

किन्हीं दों संख्याओं का परस्पर गुणा आधार एवं उपाधार के उचित चयन से सरल हो जाता है। इसे हम निम्नांकित उदाहरण द्वारा समझेंगे।

उदाहरण 5 : 57 में 63 का गुणा कीजिए।

हल : यहाँ आधार 100लेने पर विचलन पर्याप्त बड़ी संख्या होगी अतः यदि 100 का उपाधार 50 का चयन करें तो विचलन छोटी संख्या होगी। अतः उपाधार लेकर ही गुणा करना सरल होगा,

अतः उपाधार $50 = \frac{1}{2} \times 100$

$$
\begin{array}{ll}
57 & +7 \\
63 & +13 \\
\hline
\frac{1}{2}(70) & / \; 91
\end{array}
$$

= 3591 उत्तर।

टिप्पणी : गुणा के दायें भाग में दो अंक होंगे क्योंकि उपाधार 50 के आधार 100 में इकाई, दहाई के अंक 0 हैं।

वैकल्पिक हल : यदि आधार 10 हो तो 50, 10 का एक अपवर्त्य है। यहाँ 50 = 10 × 5 अतः गुणा निम्नवत् होगा।

CS Scanned with CamScanner

$$\begin{array}{l} 57 \quad +7 \\ 63 \quad +13 \\ \hline 5 \times 70 \,/\, 9/1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{r} 3500 \\ +\ 91 \\ \hline 3591 \end{array}$$ उत्तर

उदाहरण 6 : 247 × 253 का मान ज्ञात कीजिए।

हल - आधार 1000 लेने पर, उपर्युक्त संख्याएँ 250 के करीब हैं। अतः उपाधार 250 लेना ठीक होगा।

अब उपाधार = $\frac{1}{4}$ × आधार

आधार 1000

अतः

$$\begin{array}{l} 247 \quad -3 \\ 253 \quad +3 \\ \hline \end{array}$$

आधार 1000 होने के कारण गुणा के दायें भाग में तीन अंक होंगे।

$$\frac{1}{4} \times 250 \,/\, 000 \; -(009)$$

$$= \begin{array}{r} 62500 \\ -\ 9 \\ \hline 62491 \end{array}$$ उत्तर

CS Scanned with CamScanner

वैकल्पिक विधि

आधार 100 चुनने पर उपाधार $250 = \frac{5}{2} \times 100$

$$\begin{array}{ll} 247 & -3 \\ 253 & +3 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{5}{2} \times 250 \;/\; 000$$

$$/ - (0009)$$

$$= \quad 62500$$

$$- \quad 9$$

$$\overline{62491} \text{ उत्तर}$$

टिप्पणी : आधार, उपाधार में ''अनुरूप्येण'' सूत्र से यह स्पष्ट है कि उनमें आनुपातिक सम्बन्ध होता है, अतः यदि आधार-उपाधार एक दूसरे के अपवर्त्य अथवा अपवर्तक हों तो गणना सुगम हो जायेगी। उपर्युक्त उदाहरण में आधार 1000 तथा उपाधार 250 लेना अधिक उपयुक्त है क्यों उपाधार 250, आधार का एक अपवर्तक है, आधार 100 लेने पर उपाधार 250 आधार का अपवर्त्य नहीं है। अपितु उसका ढाई गुना है। दोनों में 2 : 5 का अनुपात है, जिसके कारण प्रश्न का हल सही है, इसमें कोई संशय नहीं है।

14.3 गुणा (*i*) सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण

यह सूत्र उन संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने में प्रयुक्त होता है, जिनके इकाई का अंक 5 है। यहाँ हम केवल एक उदाहरण लेकर इसे समझते हैं।

उदाहरण : 245 का वर्ग कीजिए

हल : 245 में इकाई अंक 5 है, अतः इसमें 'एकाधिकेन पूर्वेण' सूत्र का प्रयोग कर 245 का वर्ग ज्ञात करेंगे। 245 में 5 को छोड़कर संख्या का शेषभाग 24 है।

अतः एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से वर्ग का

बायाँ भाग $= 24 \times (24 + 1) = 24 \times 25 = 600$

तथा वर्ग का दायाँ भाग $= 5^2 = 25$

अतः $(245)^2 = 600 / 25$

$= 60025$

गुणा (*ii*) सूत्र ''एक न्यूनेन पूर्वेण''

जब किसी संख्या में किसी ऐसी संख्या का गुणा करना होता है, जिसके सभी अंक 9 हों, तब इस सूत्र का प्रयोग करते हैं। जैसे 245 × 9999 का यदि मान ज्ञात करना हो, तब उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करेंगे। इस

CS Scanned with CamScanner

गुणनफल में

बायाँ पक्ष	= (245 − 1)	(गुण्यक - 1)
तथा दायाँ पक्ष	= 9999 − (245 − 1)	(गुणक - गुणनफल का बायाँ पक्ष)
	= 9999 − 244	
	= 9755	
अतः गुणनफल	= बायाँ पक्ष / दायाँ पक्ष	
	= 244 / 9744	
	= 2449755 उत्तर	
उत्तर की जाँच	= 245 × 9999	= 245 × (10000 − 1)
	= 2450000 − 245	
	= 2449755	

अभ्यास कीजिए

1. 8756 × 99999 का मान बताइए।
2. 15673 × 999999 का मान बताइए।

14.4 गुणा (*i*) ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम (अंकगणित)

यह विधि गुणा के सब प्रकार के प्रश्नों में प्रयुक्त कर सकते हैं। "ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्" का अर्थ है "ऊर्ध्वाधर और तिर्यक"। इस विधि को निम्नांकित उदाहरणों से समझते हैं।

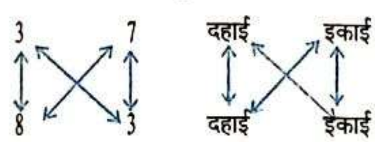
उदाहरण 1 : 6 में 8 का गुणा कीजिए

हल : $6 \times 8 = \begin{matrix} 6 \\ \updownarrow \\ 8 \end{matrix} = 48$ (यहाँ गुणन ऊर्ध्वाधर है)

एक अंक वाली संख्याओं के गुणनफल इसी विधि से ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 2 : 37 में 83 का गुणा कीजिए।

हल :



(अ) यहाँ पर गुणा का प्रथम चरण (ऊर्ध्वाधर) = 3 × 7 = 21

(ब) गुणा का द्वितीय चरण (तिर्यक) = 3 × 3 + 8 × 7

= 9 + 56= 65

CS Scanned with CamScanner

(स) गुणा का तृतीय चरण (उर्ध्वाधर) = 8 × 3 = 24

गुणनफल = 24 / 65 / 21

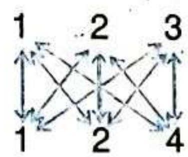
```
   21
  65
 24
-----
 3071   उत्तर
-----
```

उदाहरण 3 - 123 में 124 का गुणा कीजिए।

हल -

1 2 3

1 2 4



(अ) गुणनफल का प्रथम चरण (उर्ध्वाधर) = 4 × 3 = 12

(ब) गुणनफल का द्वितीय चरण (तिर्यक) = 4 × 2 + 2 × 3 = 14

(स) गुणनफल का तृतीय चरण (तिर्यक, तिर्यक, उर्ध्वाधर) = 4 × 1 + 1 × 3 + 2 × 2 = 11

(द) गुणनफल का चतुर्थ चरण (तिर्यक) = 2 × 1 + 1 × 2 = 4

(द) गुणनफल का प्रचम चरण (उर्ध्वाधर) = 1 × 1 = 1

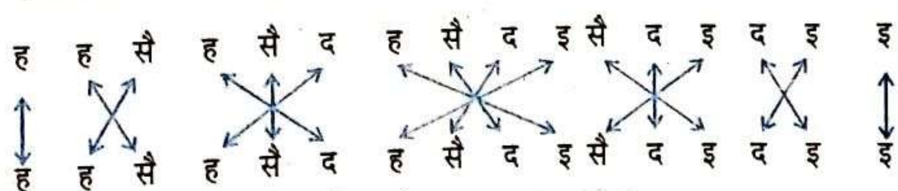
गुणनफल = 1 / 4 / 11 / 14 / 12

= 1 5 2 5 2

```
    12
   14
  11
  4
 1
-----
 15252
-----
```

उदाहरण 4 - 7824 में 2638 का गुणा कीजिए।

दायें से बायें के क्रम में गुणा चरण-संकेत



(इ = इकाई, द = दहाई, सै = सैकड़ा, ह = हजार)

Scanned with CamScanner

गुणा		7	8	2	4	
		2	6	3	8	
2×7	6×7+ 2×8	3×7+2×2 +6×8	8×7+2×4 +3×8+6×2	8×8+6×4 +2×3	2×8+3×4	4×8

	दसला.	लाख.	द.ह.	ह.	सै.	द.	इ.
=	14 /	58 /	73 /	100 /	94 /	28 /	32

= 2 0 6 3 9 7 1 2 उत्तर

```
          32
         28
        94
      100
      73
     58
    14
  -----------
  2 0 6 3 9 7 1 2
```

उपर्युक्त की भाँति हम दो संख्याओं के गुणा ''ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्'' सूत्र से कर सकते हैं।

अभ्यासार्थ प्रश्न

गुणनफल ज्ञात कीजिए

(अ) 67 × 68 (ब) 329 × 532 (स) 425 × 123

(द) 1324 × 1235 (य) 2875 × 1463

गुणा (*ii*) ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् (बीजगणित)

दो बीजगणितीय व्यंजकों के गुणनफल में ''ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्'' सूत्र का ही प्रयोग करते हैं। एक उदाहरण द्वारा इसे स्पष्ट करते हैं।

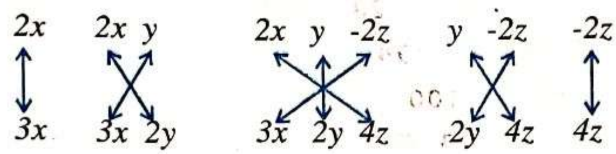
CS Scanned with CamScanner

उदाहरण : $(2x+y-2z)$ में $(3x+2y+4z)$ का गुणा कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 2x & +y & -2z \\ & & \times\ 3x & +2y & +4z \\ \hline & & 8xz & +4yz & -8z^2 \\ & 4xy & +2y^2 & -4yz & \\ 6x^2 & +3xy & -6xz & & \\ \hline 6x^2 & +7xy & +2y^2+2xz+0yz-8z^2 \\ = 6x^2 & +7xy & +2y^2+2xz & -8z^2 \end{array}$$

गुणनसंकेत



दायें से बायें गुणनफल का प्रथम पद	=	$4zx(-2z)$	=	$-8z^2$
दायें से बायें गुणनफल का द्वितीय पद	=	$4yz-4yz$	=	$0yz$
दायें से बायें गुणनफल का तृतीय पद	=	$8xz-6xz+2y^2$	=	$2xz+2y^2$
दायें से बायें गुणनफल का चतुर्थ पद	=	$4xy+3xy$	=	$7xy$
दायें से बायें गुणनफल का पंचम पद	=	$2x\times3x$	=	$6x^2$
अतः गुणनफल	=	$6x^2+7xy+2y^2+2xz+0yz-8z^2$		
	=	$6x^2+7xy+2y^2+2xz-8z^2$		

14.5 वर्ग सूत्र

(1) एक न्यूनेन पूर्वेण (9^2, 99^2, 999^2, ...)

इस विधि से 9, 99, 999, 9999, ... (जो कि अपने आधार से ठीक 1 कम हैं, का वर्ग करते हैं। क्रियाविधि निम्नांकित उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 1 : 99 का वर्ग कीजिए।

हल : 99 का आधार 100 है। यह आधार से 1 कम है,

अतः 99 के वर्ग का प्रथम भाग अर्थात्

बायाँ भाग $= (99-1) = 98$

अब अभीष्ट वर्ग का दायाँ भाग $= (-1)^2 = 01$

ध्यान दें, आधार 100 होने के कारण दायें भाग में दो अंक होंगे।

अतः $99^2 = (99-1) / 01 = 9801$ उत्तर

CS Scanned with CamScanner

उदाहरण 2 : 999 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल : $999^2 = (999-1) \ / \ (-1)^2$

$= (999 - 1) \ / \ 001$

(आधार 1000 होने के कारण वर्ग के दायें भाग में 3 अंक होंगे)

$= 998001$ उत्तर

इसी प्रकार हम आधार के ठीक 1 न्यून वाली संख्याओं का वर्ग उपर्युक्त विधि से कर सकते हैं।

(2) यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्

इस सूत्र का अर्थ है कि जिस संख्या का वर्ग करना है, उस संख्या की आधार से जितनी कमी है, ठीक उतना ही उस संख्या से कम कर दें (यह वर्ग का बायाँ भाग होगा) और पुनः उस कमी का वर्ग करके वर्ग का दायाँ भाग प्राप्त करें, उसे बायें भाग के साथ संयुक्त करें। इसे निम्नांकित उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 1 : 8 का वर्ग कीजिए।

हल : स्पष्टतः संख्या 8 की आधार से कमी $= 10 - 8 = 2$

अतः वर्ग का बायाँ भाग $= (8 - 2) = 6$

अब वर्ग का दायाँ भाग $= (2)^2 = 4$

अतः 8 का वर्ग $= 6 \ / \ 4 = 64$

(टिप्पणी : आधार 10 होने के कारण वर्ग के दायें भाग में केवल एक अंक होगा।)

उदाहरण 2 : 97 का वर्ग कीजिए।

हल : यहाँ 97 की आधार से कमी $= 100 - 97 = 3$

अत : $(97)^2$ का बायाँ भाग $= (97 - 3)$

तथा दायाँ भाग $= (3)^2 = 09$

यहाँ आधार 100 होने के कारण दायें पक्ष में दो अंक होंगे।

इसी कारण $(3)^2 = 9 = 09$ है।

$\therefore$ $97^2 = (97 - 3) \ / \ 09 = 9409$ उत्तर।

उदाहरण 3 : 994 का वर्ग कीजिए।

हल : यहाँ 1000 से 994 की न्यूनता $= 1000 - 994 = 6$.

अतः $(994)^2 = (994 - 6) \ / \ (6)^2$

$= 988 / \ 036$

$= 988036$ उत्तर।

टिप्पणी : ध्यान दें, यदि संख्या आधार से बड़ी है, तब उस स्थिति में आधार से संख्या के विचलन को धनात्मक लेंगे और तब उसे उस संख्या में जोड़ेंगे। इसे उदाहरण द्वारा स्पष्ट करते हैं।

Scanned with CamScanner

उदाहरण 4 : 14 का वर्ग कीजिए

हल : यहाँ (आधार 10 से विचलन = 4)

$$(14)^2 = (14+4) / (4)^2$$

$$= 18 /_1 6 = 196 \text{ उत्तर}$$

उदाहरण 5 : 108 का वर्ग कीजिए।

हल : 108 का आधार 100 से विचलन = 8

$$(108)^2 = (108 + 8) / (8)^2$$ (दायें भाग में दो अंक होंगे)

$$= 116 / 64$$

$$= 11664 \text{ उत्तर}$$

उदाहरण 6 : 1021 का वर्ग कीजिए।

हल :

$$(1021)^2 = (1021 + 21) / (21)^2$$

$$= 1042441 \text{ उत्तर}$$

बीजांक से वर्ग की जाँच

उदाहरण (6) को देखें।

जिस संख्या का वर्ग करते है, उसका बीजांक

अर्थात् 1021 का बीजांक = 1 + 0 + 2 + 1 = 4

अब 4 का वर्ग = 16

16 का बीजांक = 1 + 6 = 7

(1021) के वर्ग 1042441 का बीजांक = 1+0+4+2+4+4+1 = 16 = 1+6 = 7

जो कि संख्या 1021 के बीजांक 4 के वर्ग 16 के बीजांक के बराबर है।

अतः उत्तर शुद्ध है।

इसी प्रकार किसी संख्या के वर्ग के सही उत्तर की शुद्धता की जाँच बीजांक द्वारा कर सकते हैं।

(3) सूत्र - एकाधिकेन पूर्वेण

यह सूत्र उन संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने में प्रयोग करते हैं, जिनके इकाई का अंक 5 है। यहाँ क्रिया-विधि निम्नांकित उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 1 : 45 का वर्ग कीजिए।

हल : यहाँ 45 में इकाई का अंक 5 है।

इस को छोड़ बायीं ओर 4 का अंक है।

अब सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण' से "पूर्व से एक अधिक" अर्थात् 4 से 1 अधिक का गुणा 4 में करेंगे।

CS Scanned with CamScanner

अतः	45 के वर्ग का बायाँ भाग	$= (4+1) \times 4$
तथा	45 के वर्ग का दायाँ भाग	$= (5)^2 = 25$
अतः	$(45)^2$	$= (4+1)\times4/25$
		$= 2025$ उत्तर

उदाहरण 2 : 125 का वर्ग कीजिए।

हल : इकाई का अंक 5 है। 5 को छोड़कर शेष अंकों वाली सख्या 12 है। अब एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से

$(125)^2$ का बायाँ भाग $= (12+1)\times12$

$= 156$

$(125)^2$ का दायां भाग $= (5)^2 = 25$

$\therefore$ $(125)^2 = 156/25 = 15625$ उत्तर

14.6 विभाजनीयता (19, 29, 39.... से)

जैसा कि पूर्व कक्षा में उल्लेख किया जा चुका है कि जिन भिन्नों के अंतिम अंक 9 हैं, उनके आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक 1 होगा।

(अ) अतः $\frac{1}{19}$ के आवर्ती का अंतिम अंक 1 होगा तथा हर 19 का प्रचालक 'एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से $1+1 = 2$ होगा।

अब पूर्व कक्षा के उदाहरणों में वर्णित (प्रदर्शित) क्रिया विधि का अनुसरण करते हुए, $\frac{1}{19}$ के आवर्ती का अंतिम अंक 1 होगा।

1 के ठीक बायें का अंक $= 1 \times 2$ (प्रचालक) $= 2$

2 के ठीक बायें का अंक $= 2 \times 2 = 4$

4 के ठीक बायें का अंक $= 4 \times 2 = 8$

8 के ठीक बायें का अंक $= 8 \times 2 = 16$ के इकाई वाला अंक 6, 1 हासिल के रूप में अगले गुणनफल, जो $6 \times 2 = 12$ होगा उसमें जोड़कर 6 के ठीक बायें का अंक 3 प्राप्त करेंगे और योगफल 13 के दहाई वाला अंक 1 पूर्ववत अगले गुणनफल ($2\times3=6$) में जोड़कर 3 के ठीक बायाँ वाला अंक 7 प्राप्त करेंगे। इसी प्रकार दायें से बायें तब तक बढ़ते चले जायेंगे जब तक कि 1 का अंक पुनः न प्राप्त हो जाय।

अतः $\frac{1}{19} = ...5_1\ 7_1\ 8\ 9_1\ 4\ 7_1\ 3_1\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1$

CS Scanned with CamScanner

इसी प्रकार पूर्वोक्त कथनानुसार दायें से बायें तब तक बढ़ेंगे, जब तक कि 1 न प्राप्त हो जाय। अतः

$$\frac{1}{19} = 1\ 0\ \ 5\ 2\ 6\ 3\ 1\ 5\ 7\ 8\ 9\ 4\ 7\ 3\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1$$

अतः $\frac{1}{19} = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$

(ब) अब हम $\frac{1}{39}$ को उपर्युक्त विधि से आवर्ती दशमलव में बदलते हैं।

स्पष्टतः हर 39 का प्रचालक = 3 + 1 = 4
तथा आवर्ती का अंतिम अंक = 1
अतः 1 में प्रचालक 4 क गुणा करने पर 1 के ठीक बायाँ वाला अंक = 1× 4 = 4 होगा।
अब 4 के ठीक बायाँ वाला अंक 6 होगा। (क्योंकि 4 × 4 = 16)
पुनः 6 के ठीक बायें वाला अंक 5 होगा (क्योंकि 6 × 4 + 1 = 25)
पुनः 5 के ठीक बायें वाला अंक 2 होगा। (क्योंकि 4 × 5 + 2 = 22)
और पुनः 2 के ठीक बायें वाला अंक 0 होगा। (क्योंकि 4 × 2 + 2 = 10)

इस प्रकार $\frac{1}{39} = \ldots\ldots \quad 1_1\ 0_2\ 2_2\ 5_1\ 6\ 4\ \dot{1}$

हम देखते हैं कि 0 के ठीक बायें वाला अंक 1 होगा (क्योंकि 0 × 4 + 1 = 1)
अतः इसके बाद दायें से बायें उपर्युक्त क्रम में अंकों की आवृत्ति होती जायेगी।

इस प्रकार $\frac{1}{39} = 0.\dot{0}\ 2\ 5\ 6\ 4\ \dot{1}$

उपर्युक्त की भाँति क्रियाविधि अपनाते हुए हम $\frac{1}{29}, \frac{1}{49}, \frac{1}{59}, \ldots$ आदि को वैदिक गणित की जादुई विधि से असांत आवर्ती दशमलव में बदल सकते हैं।

विशेष

एक बार $\frac{1}{19}$ के आवर्ती दशमलव पर ध्यान दें -

$$\frac{1}{19} = 0.\dot{0}\ 5\ 2\ 6\ 3\ 1\ 5\ 7\ 8\ 9\ 4\ 7\ 3\ 6\ 8\ 4\ 2\ \dot{1}$$

यहाँ दायें से बायें 9वाँ अंक 9 है। आप देखते हैं कि $\frac{1}{19}$ के आवर्ती दशमलव में कुल 18 अंक हैं जिसका आधा 9 है। अतः दायें से बायें 9 अंकों को प्राप्त कर लेने के बाद शेष के दायें से बायें के 9 अंक क्रमशः प्रथम प्राप्त 9 अंकों के 9 के पूरक अंक हैं। यथा

Scanned with CamScanner

दायें से बायें दसवाँ अंक = 9 − 1 = 8
दायें से बायें ग्यारहवाँ अंक = 9 − 2 = 7
दायें से बायें बारहवाँ अंक = 9 − 4 = 5
दायें से बायें तेरहवाँ अंक = 9 − 8 = 1
दायें से बायें चौदहवाँ अंक = 9 − 6 = 3
दायें से बायें पन्द्रहवाँ अंक = 9 − 3 = 6
दायें से बायें सोलहवाँ अंक = 9 − 7 = 2
दायें से बायें सत्रहवाँ अंक = 9 − 4 = 5
दायें से बायें आठरहवाँ अंक = 9 − 9 = 0

जब आप $\frac{1}{29}$ को आवर्ती दशमलव में बदलेंगे तो आप देखेंगे कि उसमें 28 अंक होंगे। दायें से बायें के क्रम में ठीक चौदहवाँ अंक 9 होगा। उसके ठीक बायें के शेष 14 अंक उपर्युक्त विधि से लिखे जा सकते हैं। आप जाँच कर सकते हैं कि $\frac{1}{29} = 0.\dot{0}\,3\,4\,4\,8\,2\,7\,5\,8\,6\,2\,0\,6\,8/9\,6\,5\,5\,1\,7\,2\,4\,1\,3\,7\,9\,3\,\dot{1}$ में दायें से बायें चौदहवाँ अंक 9 है जहाँ पर एक तिर्यक रेखा खींच दी गयी है। अब इस रेखा के ठीक बायें ओर के अंक क्रमशः दायें से बायें क्रम में लिखे अंकों क्रमशः 1, 3, 9, 7....., 5, 6, 9 के पूरक अंक 8 6 0 2, ... 4 3 0 हैं।

ध्यान दें

जिन भिन्नों के हर, जिनके इकाई का अंक 9 है तथा हर अभाज्य संख्या है, उनके आवर्ती दशमलव में अंकों की संख्या अभाज्य हर वाली संख्या से 1 कम होती है। जैसे $\frac{1}{19}, \frac{1}{29}, \frac{1}{59}, \frac{1}{79}, \frac{1}{89}$ के आवर्ती दशमलव में क्रमशः 18, 28, 58, 78 व 88 अंक होंगे। आप अभ्यास कर इसे जाँच सकते हैं।

Scanned with CamScanner